

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 TEORI PEMBELAJARAN

2.1.1 Pengertian Belajar

Dalam keseluruhan proses pendidikan di sekolah, belajar merupakan aktivitas yang paling utama. Ini berarti bahwa keberhasilan pencapaian tujuan pendidikan banyak bergantung pada bagaimana proses belajar dapat berlangsung secara efektif.

Belajar berarti berusaha memperoleh kepandaian atau ilmu (Kamus Besar Bahasa Indonesia, 1998: 13). Menurut Morgan dalam Ngalim Purwanto (2007: 84) belajar merupakan perubahan yang relatif menetap dalam tingkah laku yang terjadi sebagai suatu hasil dari latihan atau pengalaman.

Belajar juga dikatakan sebagai suatu proses interaksi antara diri manusia dengan lingkungannya, yang mungkin berwujud pribadi, fakta, konsep ataupun teori (Sardiman, 2005: 22).

Dari beberapa pengertian di atas dapat disimpulkan bahwa pengertian belajar adalah suatu proses perubahan tingkah laku seseorang atau individu yang disebabkan oleh latihan dan pengalaman untuk memperoleh kepandaian atau ilmu, sebagai hasil dari interaksi dengan lingkungannya.

2.1.2 Pengertian Pembelajaran

Pembelajaran merupakan proses yang mengandung serangkaian tindakan pendidik dan peserta didik atas dasar hubungan timbal balik yang berlangsung dalam situasi edukatif untuk mencapai tujuan tertentu (Uzer Usman, 2002:4).

Menurut UU Nomor 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional, pembelajaran adalah proses interaksi peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar.

Menurut Mulyasa (2006:117) pembelajaran adalah aktualisasi kurikulum yang menuntut keaktifan guru dalam menciptakan dan menumbuhkan kegiatan peserta didik sesuai dengan rencana yang telah diprogramkan .

Menurut Hamalik (2002: 56) pembelajaran adalah suatu kombinasi yang tersusun meliputi unsur-unsur manusiawi, material, fasilitas, dan proses yang saling mempengaruhi dalam mencapai tujuan pembelajaran.

Dari beberapa pendapat diatas dapat disimpulkan pembelajaran adalah serangkaian kegiatan yang dirancang untuk proses belajar sehingga terjadi interaksi antara peserta didik dan pendidik, serta sumber belajar untuk mempelajari suatu konsep pembelajaran secara menyeluruh, sehingga tercapai tujuan pembelajaran.

2.2 TUTOR SEBAYA

2.2.1 Pengertian Tutor Sebaya

Supriyadi dalam Suherman, dkk (2003: 276) berpendapat bahwa tutor sebaya adalah seorang atau beberapa orang peserta didik yang ditunjuk dan ditugaskan untuk membantu peserta didik yang mengalami kesulitan belajar, tutor tersebut diambil dari kelompok yang prestasinya lebih tinggi.

Sedangkan Winataputra (1999: 2) mengemukakan bahwa :

“Tutor sebaya adalah seorang teman atau beberapa orang peserta didik yang ditunjuk oleh Guru (sesuai kriteria menjadi tutor sebaya) dan ditugaskan untuk membantu peserta didik yang mengalami kesulitan belajar. Pengajaran tutor sebaya adalah kegiatan belajar peserta didik dengan memanfaatkan teman sekelas yang mempunyai kemampuan lebih untuk membantu temannya dalam melaksanakan suatu kegiatan atau memahami konsep”.

Didasarkan pada prinsip hubungan sosial atau sosialisasi, dalam belajar peserta didik juga perlu dilatih untuk bekerja sama dengan rekan sebayanya. Dengan demikian, rasa saling menghargai dan toleransi dapat terbentuk antar peserta didik. Metode diskusi

kelompok tepat digunakan dalam proses pembelajaran dengan tujuan tersebut. Dengan memodifikasi metode pembelajaran yang didasarkan pada diskusi kelompok. Pembelajaran tutor sebaya adalah sebuah pembelajaran yang didasarkan pada diskusi kelompok yang menggunakan peserta didik yang memiliki kependaian yang lebih agar memberi bantuan kepada peserta didik yang lain.

Dalam hal tertentu peserta didik lebih faham dengan bahasa temannya dibandingkan dengan bahasa guru. Salah satu sebabnya adalah karena hubungan antar teman atau peserta didik umumnya lebih dekat dibanding hubungan peserta didik dengan guru (Ahmadi dan Widodo, 2004: 184). Itulah sebabnya pembelajaran tutor sebaya diterapkan dalam proses pembelajaran matematika.

Hisyam Zaini dalam Amin Suyitno (2004) menyatakan bahwa:

“Metode belajar yang baik adalah dengan mengajarkan kepada orang lain. Oleh karena itu, pemilihan model pembelajaran tutor sebaya sebagai strategi pembelajaran akan sangat membantu peserta didik dalam mengajarkan materi kepada teman-temannya”.

Miller (1989) dalam Amin Suyitno (2004) berpendapat bahwa setiap saat peserta didik memerlukan bantuan dari peserta didik lainnya, dan peserta didik dapat belajar dari peserta didik lainnya. Sedangkan Jan Collingwood (1991) dalam Amin Suyitno (2004) juga berpendapat bahwa setiap anak memperoleh pengetahuan dan keterampilannya karena dia bergaul dengan teman lainnya.

Berdasarkan definisi di atas, maka dapat disimpulkan bahwa tutor sebaya yang dimaksud adalah seorang atau beberapa peserta didik yang ditunjuk oleh guru dalam melakukan bimbingan terhadap teman sekelasnya. Dengan itu, guru dapat mengoptimalkan kemampuan peserta didik yang berprestasi dalam satu kelas untuk mengajarkan kepada teman sebaya mereka yang kurang berprestasi. Pembimbingan dalam pelajaran yang diberikan oleh seorang peserta

didik kepada peserta didik lain, sedangkan mereka (antara pembimbing dan yang dibimbing) adalah teman sekelas atau sebangku yang usianya relatif sama, dan peserta didik yang kurang faham bisa bertanya langsung dengan teman sebaya (tutor yang ditunjuk) sehingga kondisi kelas pun bisa hidup karena peserta didik tidak malu bertanya ketika menemukan kesulitan belajar.

Pembelajaran tutor sebaya ini banyak sekali manfaatnya baik dari sisi peserta didik yang berperan sebagai tutor maupun bagi peserta didik yang diajarkan. Peran Guru adalah sebagai fasilitator serta mengawasi kelancaran pelaksanaan pembelajaran ini dengan tetap memberi pengarahan.

Agar pembelajaran tutor sebaya mencapai tingkat keberhasilan yang diharapkan, Miller dalam Amin Suyitno (2004) menjelaskan saran penggunaan tutor sebaya sebagai berikut :

1. Mulailah dengan tujuan yang jelas dan mudah dicapai
2. Jelaskan tujuan tersebut kepada seluruh peserta didik (kelas).
Misalnya agar pelajaran matematika dapat mudah difahami
3. Siapkan bahan dan sumber belajar yang memadai
4. Gunakan cara yang praktis
5. Hindari kegiatan pengulangan yang telah dilakukan oleh guru
6. Pusatkan kegiatan tutorial pada keterampilan yang akan dilakukan tutor
7. Berikan latihan singkat mengenai apa yang akan dilakukan tutor
8. Lakukan pemantauan terhadap proses belajar yang terjadi melalui tutor sebaya
9. Jagalah agar peserta didik yang menjadi tutor tidak sombong

2.2.2 Kriteria Tutor Sebaya

Sawali (2007) menjelaskan bahwa seorang tutor hendaknya memiliki kriteria :

1. Memiliki kemampuan akademis di atas rata-rata peserta didik dalam satu kelas

2. Mampu menjalin kerja sama antar peserta didik
3. Memiliki motivasi tinggi untuk meraih prestasi akademis yang baik
4. Memiliki motivasi tinggi untuk menjadikan kelompok diskusinya sebagai kelompok yang terbaik
5. Memiliki sikap toleransi, tenggang rasa, dan ramah dengan sesama
6. Bersikap rendah hati, pemberani, dan bertanggung jawab, serta suka membantu sesama yang mengalami kesulitan.

2.2.3 Langkah-langkah Pembelajaran Tutor Sebaya

Langkah-langkah pembelajaran tutor sebaya dalam kelompok kecil adalah sebagai berikut :

- a. Membagi peserta didik menjadi kelompok-kelompok kecil. Setiap kelompok terdiri dari 3 atau 4 peserta didik.
- b. Peserta didik yang telah ditunjuk sebagai tutor dibagi di setiap kelompok yang telah dibentuk.
- c. Guru menjelaskan mengenai sistematika pembelajaran tutor sebaya.
- d. Masing-masing kelompok diberi tugas mempelajari sub-sub materi limit fungsi aljabar.
- e. Peserta didik melakukan pembelajaran secara mandiri dengan pembelajaran tutor sebaya yang dipandu oleh tutornya masing-masing.
- f. Guru mngontrol jalannya pembelajaran.
- g. Setiap kelompok melalui wakilnya (selain tutor) menyampaikan materi sesuai tugas yang telah didiskusikan.
- h. Setelah semua kelompok menyampaikan hasil diskusinya secara berurutan, selanjutnya guru membimbing peserta didik menemukan kesimpulan.

2.2.4 Kelebihan dan Kelemahan Pembelajaran Tutor Sebaya

Pembelajaran tutor sebaya ini dapat dipandang sebagai reaksi terhadap pengajaran klasikal dengan kelas yang terlampau besar dan padat sehingga guru tidak dapat memberikan bantuan individual, bahkan sering tidak mengenal satu per satu peserta didiknya. Demikian pula dengan peserta didik, sebagian dari mereka tidak dapat memahami penjelasan yang disampaikan oleh guru. Dilihat dari perbedaan cara belajar peserta didik, pengajaran klasikal dengan menggunakan proses belajarmengajar yang sama bagi semua peserta didik tidak akan sesuai bagi kebutuhan dan kepribadian mereka.

Dengan pembelajaran tutor sebaya peserta didik akan lebih mudah untuk memahami materi karena penyampai materi adalah temannya sendiri sehingga bahasa yang digunakan lebih mudah difahami.

Pembelajaran tutor sebaya dalam kelompok kecil diharapkan akan dapat membuka kemungkinan memberikan pengajaran bagi sejumlah besar peserta didik juga bagi pengajar tutor sebaya.

a. Kelebihan Tutor Sebaya

Kelebihan tutor sebaya dalam pendidikan yaitu dalam penerapan tutor sebaya itu sendiri, peserta didik diajarkan untuk mandiri, dewasa dan memiliki rasa setia kawan yang tinggi. Artinya dalam penerapan tutor sebaya itu, peserta didik yang dianggap pandai bisa mengajarkan atau menjadi tutor kepada temannya yang kurang pandai. Disini peran Guru hanya sebagai fasilitator atau pembimbing saja. Pada diskusi kelompok kecil, Guru dapat bergerak dengan leluasa. Selain itu bagi para peserta didik bantuan belajar oleh teman sebaya akan dapat menghilangkan kecanggungan, serta bahasa teman sebaya lebih mudah difahami. Dengan teman sebaya tidak ada rasa enggan, rendah diri, malu dan sebagainya untuk bertanya ataupun minta bantuan.

Guru dapat menugaskan peserta didik yang pandai untuk memberikan bimbingan atau bantuan kepada peserta didik yang lain yang mengalami kesulitan belajar. Demikian juga untuk peserta didik yang mengalami kesulitan belajar diharapkan untuk mau bertanya atau meminta penjelasan dari tutornya terlebih dahulu sebelum kepada gurunya. Hal ini untuk menanamkan kesan bahwa belajar itu bisa dari siapa saja. Sehingga tutor sebaya dikatakan berhasil jika tutor dapat menjelaskan materi pelajaran, dan yang dijelaskan dapat membuktikan bahwa dia telah mengerti atau memahami materi tersebut.

b. Kelemahan Tutor Sebaya

Kelemahan dari pembelajaran tutor sebaya ini antara lain :

1. Tidak semua peserta didik dapat menjelaskan kepada temannya
2. Kelas berpotensi ramai dan tidak terkendali
3. Guru berpotensi mengabaikan peserta didik karena terlalu mengandalkan tutor

2.3 LEMBAR KERJA SISWA (LKS)

Untuk dapat mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan, dibutuhkan alat bantu pembelajaran yang dapat memudahkan seorang Guru dalam pelaksanaan pembelajarannya. Sedangkan bagi siswa, penggunaan alat bantu pembelajaran ditujukan untuk belajar mandiri. Salah satu alat bantu pembelajaran yang sesuai dengan tujuan tersebut adalah Lembar Kerja Siswa (LKS).

Lembar Kerja Siswa (LKS) adalah lembaran-lembaran berisi tugas yang harus dikerjakan oleh peserta didik. Lembar Kerja Siswa biasanya berupa petunjuk atau langkah-langkah untuk menyelesaikan tugas tertentu (Depdiknas, 2008: 13).

Sedangkan menurut Ahmadi (2011: 176), Lembar Kerja Siswa adalah lembaran-lembaran yang digunakan sebagai pedoman, yang

memuat berbagai kegiatan dan tugas yang akan dikerjakan oleh peserta didik secara aktif dalam kajian tertentu.

Dari beberapa pengertian di atas dapat disimpulkan bahwa Lembar Kerja Siswa (LKS) adalah alat bantu pembelajaran berupa kertas atau buku yang memuat berbagai soal atau kegiatan yang harus diselesaikan oleh peserta didik yang dapat digunakan peserta didik untuk tujuan menemukan dan menerapkan konsep atau prinsip matematika.

Penggunaan LKS berpengaruh besar terhadap proses pembelajaran, karena dapat meningkatkan aktifitas peserta didik dalam belajar, serta membantu guru untuk mengarahkan peserta didik menemukan dan mengembangkan konsep melalui aktifitasnya sendiri (Ahmadi, 2011: 177). Dari aktifitas peserta didik dalam proses pembelajaran menggunakan LKS diharapkan dapat mengoptimalkan hasil belajar mereka.

2.4 EFEKTIVITAS

2.4.1 Pengertian Efektivitas

Aktivitas pembelajaran yang dikembangkan di sekolah dasar dan sekolah menengah setidaknya memiliki target dalam penyampaian materi pelajaran yang dilakukan oleh masing-masing guru mata pelajaran (Tri Wibowo, 2008:103). Artinya guru dituntut untuk memiliki persiapan dan penguasaan yang baik dalam bidang keilmuan maupun dalam merancang program pembelajaran yang disajikan. Hal tersebut merupakan modal bagi terlaksananya pembelajaran yang efektif.

Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia, efektivitas berasal dari kata efektif yang berarti mempunyai efek, pengaruh atau akibat, sedangkan kata efektivitas berarti keberhasilan atau ketepatangunaan. Maka efektivitas dapat diartikan sebagai seberapa besar tingkat keberhasilan yang dapat diraih dari suatu cara atau usaha tertentu, sesuai dengan tujuan yang hendak dicapai.

Pengertian efektivitas menurut Kamus Ensiklopedia Indonesia (1989) adalah menunjukkan taraf tercapainya suatu

tujuan. Suatu usaha dikatakan efektif apabila usaha itu telah mencapai tujuannya. Hal tersebut sesuai dengan pengertian efektivitas menurut Sudjana (2010: 59) yang menjelaskan bahwa efektivitas berkenaan dengan jalan, upaya, teknik atau strategi yang digunakan dalam mencapai tujuan secara tepat.

Menurut Ahmadi dan Amri (2011: 30), efektivitas berarti kemampuan untuk memiliki atau mencapai tujuan sebagaimana yang diharapkan.

Dari beberapa teori yang telah dijelaskan, maka dapat disimpulkan bahwa efektivitas merupakan keterkaitan antara proses yang telah direncanakan dan hasil yang dinyatakan, dengan jalan atau strategi yang digunakan secara tepat.

2.4.2 Pembelajaran Efektif

Menurut Mulyasa (2006: 83) menyatakan bahwa “Efektivitas merupakan barometer untuk mengukur keberhasilan suatu pendidikan”, maka dari itu Mulyasa menyampaikan indikator pembelajaran adalah sebagai berikut:

1. *Indikator input* ; meliputi karakteristik, fasilitas, perlengkapan, dan materi pendidikan serta kapasitas administrasi.
2. *Indikator proses*; meliputi perilaku administratif, alokasi waktu guru, dan alokasi waktu peserta didik.
3. *Indikator output*; meliputi hasil-hasil dalam bentuk perolehan peserta didik dan dinamikanya, sistem sekolah, hasil-hasil yang berhubungan dengan prestasi belajar, hasil-hasil yang berhubungan dengan perubahan sifat, serta hasil-hasil yang berhubungan dengan keadilan dan kesamaan.
4. *Indikator outcome*; meliputi jumlah lulusan ke tingkat pendidikan berikutnya, prestasi belajar disekolah yang lebih tinggi dan pekerjaan, serta pendapatan.

Mulyasa (2006:92) mengatakan bahwa efektivitas belajar dapat dilihat dari kemampuan seorang guru dalam melaksanakan pembelajaran dengan baik.

Menurut Eggen dan Kauchak (dalam Hakim Simanjuntak, 2011) mengemukakan bahwa :

”Pembelajaran yang efektif apabila peserta didik secara aktif dilibatkan dalam pengorganisasian dan penentuan informasi (pengetahuan). Peserta didik tidak hanya pasif menerima pengetahuan yang diberikan guru”.

Efektivitas pembelajaran terjadi jika peserta didik secara aktif terlibat dalam pembelajaran sehingga dapat menemukan hubungan-hubungan informasi yang diberikan oleh guru. Peserta didik tidak hanya pasif menerima informasi atau pengetahuan, tetapi mereka juga dapat memberi tanggapan secara aktif. Hasil aktivitas ini tidak hanya meningkatkan pemahaman dan daya serap peserta didik pada suatu materi pembelajaran, tetapi juga melibatkan keterampilan berpikir mereka.

Kemp (dalam Mudhoffir, 1993: 145) mengemukakan cara untuk mengukur keefektifan pembelajaran yaitu dengan mengajukan suatu pertanyaan, “Apakah yang telah dicapai peserta didik?”. Untuk menjawab pertanyaan ini harus diketahui berapa banyak jumlah peserta didik yang berhasil mencapai tujuan belajar dalam waktu yang telah ditentukan.

Menurut Diamond (dalam Mudhoffir, 1993:146), keefektifan pembelajaran dapat diukur dengan melihat minat peserta didik terhadap kegiatan pembelajaran. Suherman (2001:78) menyatakan minat mempengaruhi proses hasil belajar peserta didik. Jika peserta didik tidak berminat untuk mempelajari sesuatu, maka tidak dapat diharapkan dia akan berhasil dengan baik dalam mempelajari hal tersebut, sebaliknya jika peserta didik belajar sesuai dengan minatnya, maka dapat diharapkan hasilnya akan lebih baik.

Dari beberapa pengertian diatas maka dapat disimpulkan efektivitas adalah kesesuaian atau keseimbangan antara proses dan hasil dari apa yang telah dilakukan dan direncanakan dalam pembelajaran proses dan hasil tersebut meliputi aktivitas guru mengajar baik, aktivitas peserta didik aktif, ketuntasan belajar peserta didik tercapai dan respon peserta didik baik.

Djamarah (dalam Syatra, 2012: 122) mengatakan bahwa efektivitas pembelajaran dapat dilihat dengan empat indikator, yaitu:

1. Memiliki tujuan. Tujuan suatu pembelajaran tak lain adalah hasil belajar peserta didiknya.
2. Kemampuan guru dalam mengelola pembelajaran.
3. Proses pembelajaran ditandai dengan adanya aktivitas peserta didik.
4. Respon peserta didik ikut mendorong keberhasilan belajar peserta didik.

Berdasarkan teori-teori yang telah dijelaskan, maka dalam penelitian ini pembelajaran dikatakan efektif apabila memenuhi keempat indikator, yaitu :

1. Kemampuan guru dalam mengelola pembelajaran dapat dilihat dalam hal :
 - a. Tujuan pengajaran yang diberikan.
 - b. Bahan pengajaran yang diberikan.
 - c. Jenis kegiatan yang dilaksanakan

(Sudjana, 2010:60)

2. Aktifitas peserta didik selama pembelajaran dapat dilihat dalam hal :
 - a. Turut serta dalam pelaksanaan tugas belajar.
 - b. Terlibat dalam pemecahan masalah.
 - c. Bertanya kepada peserta didik lain ataupun kepada guru apabila tidak memahami persoalan yang dihadapinya, dll.

(Sudjana, 2010:61)

3. Ketuntasan belajar secara individu serta klasikal kelas.

Ketuntasan hasil belajar yang diberikan pembelajaran tutor sebaya melalui penggunaan LKS dapat dilihat dari hasil tes yang diberikan oleh peneliti. Dengan kriteria ketuntasan belajar peserta didik secara individu yang telah ditentukan di MA Hidayatul Ummah untuk mata pelajaran matematika yaitu 75. Sedangkan untuk ketuntasan belajar klasikal sebesar 80%.

4. Respon peserta didik terhadap pembelajaran.

Respon peserta didik dapat dilihat dari angket yang diberikan kepada peserta didik yang diberikan di akhir pertemuan pada penelitian ini.

2.5 LIMIT FUNGSI

2.5.1 Pengertian Limit Fungsi

Limit suatu fungsi mengandung pengertian tentang nilai fungsi yang diperoleh melalui proses pendekatan.

Limit fungsi dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut.

Limit fungsi memiliki pengertian tentang nilai fungsi yang didapat melalui pendekatan terhadap suatu batas tertentu.

Untuk dapat memahami pengertian limit fungsi secara intuitif, perhatikan Contoh berikut!

Fungsi f di definisikan sebagai $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Untuk itu perhatikanlah tabel berikut :

Tabel 2.1 Limit Fungsi

x	1,85	1,95	1,97	1,99	1,999	2,000	2,001	2,01	2,1	2,2
$f(x)$	4,85	4,95	4,97	4,99	4,999	$\frac{0}{0}$	5,001	5,01	5,1	5,2

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa jika variabel $x = 2$, maka $f(x) = \frac{0}{0}$ (tidak didefinisikan) yaitu suatu bentuk tak tentu, tetapi $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ mendekati 5 jika x mendekati 2, baik didekati dari sebelah kiri (disebut limit kiri) maupun didekati dari sebelah kanan (disebut limit kanan). Dapat ditulis :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 2+3 = 5$$

2.5.2 Menyelesaikan Limit Fungsi Aljabar

a. Menentukan nilai Limit Fungsi jika variabelnya mendekati titik tertentu.

- **Substitusi**

Perhatikanlah contoh berikut!

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 7)$.

Penyelesaian :

Nilai limit dari fungsi $f(x) = 2x^2 + 7$ dapat diketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubstitusikan $x = -2$ ke $f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 7) = 2(-2)^2 + 7 = 15$ Artinya, jika x mendekati -2 maka $2x^2 + 7$ dekat pada 15 didapat dari $2(-2)^2 + 7 = 15$. Dengan ketentuan sebagai berikut:

- Jika $f(a) = c$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$
- Jika $f(a) = \frac{c}{0}$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
- Jika $f(a) = \frac{0}{c}$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
- Jika $f(a) = \frac{0}{0}$, maka sederhanakan atau ubahlah lebih dahulu bentuk $f(x)$ menjadi bentuk (a), (b), atau (c).

- **Faktorisasi**

$$f(a) = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Dari bentuk tersebut, agar mendapatkan bentuk tertentu maka $f(x)$ difaktorkan atau dikalikan sekawan pembilang atau penyebut, kemudian disederhanakan dan diselesaikan.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

$$\text{Tentukan nilai } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}.$$

$$\text{Jika } x = 3 \text{ kita substitusikan maka } f(3) = \frac{3^2 - 8 \cdot 3 + 15}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi $f(x)$ sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-5)(x-3)}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x - 5) \\ &= 3 - 5 \\ &= -2 \end{aligned}$$

- **Perkalian sekawan**

Cara yang ketiga ini digunakan apabila penyebutnya berbentuk akar yang perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Perhatikan contoh berikut!

Contoh:

$$\text{Tentukan nilai } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x-1}) \\
&= \sqrt{1-1} \\
&= 1-1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Perhatikan contoh berikut!

Contoh:

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt{x+1})}{(x^2-x)} \cdot \frac{(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\sqrt{x+1})^2}{(x^2-x)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(x+1)}{(x^2-x)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \frac{-1}{(0-1)(1+\sqrt{0+1})} \\
&= \frac{-1}{(-1)(1+1)} \\
&= \frac{-1}{-2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b. Menentukan nilai Limit Fungsi yang variabelnya mendekati tak hingga.

Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ tak terdefinisi untuk $x = 0$.

Untuk $x \rightarrow \infty$, perhatikan tabel berikut :

Tabel 2.2 Limit mendekati tak hingga

X	1	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	...	$\rightarrow \infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	...	0

$$\text{Jadi } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Untuk menentukan nilai limit yang variabelnya mendekati tak hingga dapat dilakukan dengan cara-cara sebagai berikut :

- **Membagi dengan pangkat tertinggi**

Cara ini digunakan untuk mencari nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Caranya dengan

membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan pangkat yang tertinggi dari variabel x yang terdapat pada $f(x)$ atau $g(x)$.

Contoh:

Tentukan nilai limit dari:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{2x}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-1}{4x^2+5}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{2x}$, perhatikan pangkat tertinggi dari x pada $f(x) = 6x + 3$ dan $g(x) = 2x$. Ternyata pangkat tertinggi dari variabel x adalah satu. Maka, untuk menentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{2x}$ maka fungsi $6x + 3$ dan $2x$ dibagi dengan x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{2x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{x}}{2} \\ &= \frac{6 + \frac{3}{\infty}}{2} \\ &= \frac{6+0}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Perhatikan contoh soal b, yaitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-1}{4x^2+5}$. Fungsi tersebut memiliki variabel x dengan pangkat tertinggi 2, yaitu x^2 yang terdapat pada $4x^2 + 5$. Maka, untuk menentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-1}{4x^2+5}$ maka fungsi $8x - 1$ dan $4x^2 + 5$ harus dibagi dengan x^2 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-1}{4x^2+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{5}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{8}{\infty} - \frac{1}{(\infty)^2}}{4 + \frac{5}{(\infty)^2}} \\ &= \frac{0-0}{4+0} \\ &= \frac{0}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Mengalikan dengan faktor lawan**

Cara ini digunakan untuk menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)]$. Untuk menyelesaikannya, maka kita harus mengalikan $[f(x) \pm g(x)]$ dengan $\frac{[f(x) - g(x)]}{[f(x) - g(x)]}$ sehingga bentuknya menjadi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] \cdot \frac{[f(x) - g(x)]}{[f(x) - g(x)]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}}{f(x) - g(x)} \quad \text{ataupun}$$

sebaliknya.

Contoh:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+5})$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+5}) \cdot \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+5})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+5})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) - (3x+5)}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+5})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-6}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+5})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2x-6}{x}}{\sqrt{\frac{x-1}{x^2}} + \sqrt{\frac{3x+5}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \frac{-2 - 0}{\sqrt{0-0} + \sqrt{0+0}} = \frac{-2}{0} = \infty
\end{aligned}$$