

## BAB II KAJIAN PUSTAKA

### 2.1 Pembelajaran Matematika

Menurut Suprihatiningrum (2013: 75) “pembelajaran adalah serangkaian kegiatan yang melibatkan informasi dan lingkungan yang disusun secara terencana untuk memudahkan siswa dalam belajar”.

Gagne dkk dalam Pribadi (2011: 15) mendefinisikan pembelajaran sebagai “serangkaian sumber belajar dan prosedur yang digunakan untuk memfasilitasi berlangsungnya proses belajar”.

Menurut Smith dan Ragan dalam Setyosari (2001: 2) “Pembelajaran adalah tindak kegiatan (*the conduct of activities*) yang difokuskan pada hal-hal khusus yang dipelajari oleh sipelajar”.

Menurut Setyosari (2001: 14) “Pembelajaran adalah penyajian informasi dengan aktivitas-aktivitas yang memudahkan si belajar untuk mencapai tujuan khusus belajar yang diharapkan”.

Sedangkan pengertian matematika menurut Ruseffendi dalam Heruman (2007: 1) “Matematika adalah bahasa simbol, ilmu deduktif yang tidak menerima pembuktian secara induktif, ilmu tentang pola keteraturan, dan struktur yang terorganisasi, mulai dari unsur yang didefinisikan, ke unsur yang didefinisikan, ke aksioma atau postulat, dan akhirnya ke dalil”.

Matematika merupakan suatu cabang ilmu pengetahuan eksak dan terorganisir secara sistematis dalam suatu sistem dengan struktur yang logik disertai dengan aturan yang ketat mengenai fakta kuantitatif serta permasalahan ruang dan bentuk beserta kalkulasinya. (Suharjo, 2000: 2-3)

Menurut Uno (2007: 128) “matematika adalah sebagai suatu bidang ilmu yang merupakan alat pikir, berkomunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, yang unsur-unsurnya logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalitas dan individualitas, serta mempunyai cabang-cabang antara lain aritmetika, aljabar, geometri, dan analisis.

Hakikat belajar matematika adalah suatu aktivitas mental untuk memahami arti dan hubungan-hubungan serta simbol-simbol, kemudian diterapkannya pada situasi nyata. (Uno, 2007: 130)

Dari beberapa pendapat diatas maka dalam penelitian ini yang dimaksud dengan pembelajaran matematika adalah serangkaian kegiatan yang melibatkan informasi dan lingkungan untuk memfasilitasi berlangsungnya proses belajar tentang salah satu cabang ilmu eksak yang merupakan alat pikir, berkomunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, yang unsur-unsurnya logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalitas dan individualitas, untuk mencapai tujuan belajar yang diinginkan.

## 2.2 Media Pembelajaran

### 2.2.1. Pengertian Media Pembelajaran

Gagne dalam Sadiman (2002: 6) menyatakan bahwa media adalah berbagai jenis komponen dalam lingkungan siswa yang dapat merangsangnya untuk belajar.

Sedangkan Briggs dalam Sadiman (2002: 6) berpendapat bahwa media adalah segala alat fisik yang dapat menyajikan pesan serta merangsang siswa untuk belajar.

Menurut Santoso S. Hamidjojo dalam Latuheru (1988: 11), “media adalah semua bentuk perantara yang digunakan oleh manusia untuk menyampaikan/menyebar ide, sehingga ide, atau pendapat, atau gagasan yang dikemukakan/disampaikan itu bisa sampai pada penerima”.

Sulaeman (1988: 68) mengartikan media adalah “...segala sesuatu yang membawa informasi atau pesan-pesan dari sumber informasi tersebut kepada penerimanya”.

Sedangkan Sadiman (2002: 6) mendiskripsikan “...media adalah segala sesuatu yang dapat digunakan untuk menyalurkan pesan dari pengirim ke penerima sehingga dapat merangsang pikiran, perasaan, perhatian, dan minat serta perhatian siswa sedemikian rupa sehingga proses belajar terjadi”.

Dari beberapa pendapat diatas maka dalam penelitian ini yang dimaksud dengan media pembelajaran adalah segala sesuatu yang ada disekitar peserta didik yang dapat digunakan untuk menyampaikan

pesan atau informasi sehingga dapat merangsang peserta didik untuk melakukan proses belajar.

### 1.2.2. Klasifikasi Media Pembelajaran

Media pembelajaran secara umum mempunyai kegunaan sebagai berikut:

- (1) Memperjelas penyajian materi sehingga tidak hanya dalam bentuk tulisan atau lisan saja.
- (2) Mengatasi masalah keterbatasan ruang, waktu, dan daya indera, seperti:
  - a. Obyek yang terlalu besar dapat digantikan dengan gambar, film, atau ilustrasi.
  - b. Obyek yang terlalu kecil dapat dibantu dengan proyektor mikro, film bingkai, film, atau gambar.
  - c. Gerak yang terlalu cepat atau terlalu lambat dapat dibantu dengan *timelapse* atau *high-speed photography*.
  - d. Kejadian atau peristiwa masa lalu dapat ditampilkan lagi lewat film, video, foto, atau disampaikan secara verbal.
  - e. Obyek yang terlalu kompleks dapat disajikan dalam bentuk digram, model, dan lain-lain.
  - f. Konsep yang terlalu luas seperti gunung meletus, gempa bumi, dan lain sebagainya, dapat ditampilkan dalam bentuk film, gambar, ilustrasi, dan lain-lain.
- (3) Dengan menggunakan media pembelajaran yang tepat dan berinovasi serta bervariasi, maka sikap pasif dari peserta didik sedikit demi sedikit akan berkurang.
- (4) Meningkatkan dan mengarahkan perhatian peserta didik sehingga dapat menimbulkan motivasi belajar, interaksi yang lebih langsung antara peserta didik dan lingkungannya, dan memungkinkan peserta didik untuk belajar sendiri-sendiri sesuai dengan kemampuan dan minatnya.
- (5) Memberikan kesamaan pengalaman kepada peserta didik tentang peristiwa-peristiwa dilingkungan mereka, serta memungkinkan

terjadinya interaksi langsung dengan guru, masyarakat, dan lingkungannya.

Kemp & Dayton dalam Arsyad (2011:37) mengelompokkan media kedalam delapan jenis, yaitu (1) media cetakan, (2) media pajang, (3) *overhead transparencies*, (4) rekaman audiotape, (5) seri slide dan filmstrips, (6) penyajian multi-image, (7) rekaman video dan film hidup, dan (8) komputer.

Berikut adalah contoh beserta kelebihan dan kekurangan media pembelajaran menurut Arsyad (2011:29-56)

**Tabel 2.1** Contoh media beserta kelebihan dan kekurangannya

Media	Kelebihan	Kekurangan
1. Media cetakan (Contoh: majalah, koran, selebaran, modul pembelajaran, dll)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Peserta didik dapat belajar dan maju sesuai dengan kecepatan masing – masing</li> <li>• Peserta didik dapat mengulang materi</li> <li>• Peserta didik akan mengikuti urutan pikiran secara logis.</li> <li>• Perpaduan teks dan gambar dapat mempermudah pemahaman.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tidak dapat menampilkan gerak</li> <li>• Biaya cetakan mahal jika ditambahkan gambar, ilustrasi, atau foto yang berwarna warni</li> <li>• Proses percetakan membutuhkan waktu relatif lama</li> <li>• Jika tidak dirawat dengan baik dapat cepat rusak dan hilang</li> <li>• Membutuhkan konsep yang menarik agar tidak membosankan.</li> </ul>
2. Media pajang (Contoh: papan tulis, flip chart, papan buletin, pameran, dll.)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bermanfaat diruang manapun tanpa harus ada penyesuaian khusus</li> <li>• Dapat diubah-ubah selama pembelajaran berlangsung</li> <li>• Mudah dipersiapkan</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Terbatas penggunaannya pada kelompok kecil</li> <li>• Memerlukan keahlian khusus dari penyajinya</li> <li>• Mungkin tidak dianggap penting jika dibandingkan dengan media-media yang diproyeksikan.</li> </ul>

<p>3. <i>overhead transparencies</i> (OHP)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pantulan proyeksi gambar dapat terlihat jelas pada ruangan yang terang</li> <li>• Dapat menjangkau kelompok yang besar</li> <li>• Transparansi dapat dengan mudah dibuat sendiri oleh guru</li> <li>• Peralatannya mudah dioperasikan</li> <li>• Memiliki kemampuan menampilkan warna</li> <li>• Dapat digunakan berulang kali</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fasilitas OHP harus tersedia</li> <li>• Listrik pada ruang / lokasi penyajian harus tersedia</li> <li>• Harus memiliki teknik khusus untuk pengaturan urutan baik dalam penyajian maupun penyimpanan.</li> </ul>
<p>4. Rekaman <i>Audio-Tape</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Radio tape telah menjadi peralatan yang sangat lumrah dalam rumah tangga, sekolah, dll</li> <li>• Rekaman dapat digandakan untuk keperluan perorangan</li> <li>• Pengoperasian radio tape relatif mudah</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sulit menentukan lokasi pesan atau informasi</li> <li>• Kecepatan merekam dan pengaturan trek yang bermacam-macam menimbulkan kesulitan untuk memainkan kembali rekaman yang direkam pada mesin perekam yang berbeda.</li> </ul>
<p>5. Slide</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Urutan gambar dapat diubah-ubah sesuai dengan kebutuhan</li> <li>• Gambar dalam slide tertentu dapat ditayangkan lebih lama</li> <li>• Slide dapat digabung dengan efek audio</li> <li>• Dapat menyajikan peristiwa masa lalu atau peristiwa ditempat lain</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gambar dan grafik visual yang disajikan tidak bergerak</li> <li>• Slide terlepas-lepas</li> <li>• Memerlukan biaya yang lebih besar jika dibandingkan media yang tidak diproyeksikan.</li> </ul>

6. Film dan video	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dapat menggambarkan suatu proses secara tepat dan dapat disaksikan secara berulang-ulang</li> <li>• Film merupakan pengganti alam sekitar dan bahkan dapat menunjukkan obyek secara nyata</li> <li>• Dapat ditunjukkan kepada kelompok besar atau kecil, kelompok yang heterogen, maupun perorangan.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Memerlukan biaya yang mahal dan waktu yang lama</li> <li>• Pada saat film diputar, gambar bergerak terus sehingga tidak semua peserta didik mampu mengikuti informasi yang ingin disampaikan</li> <li>• Film dan video yang tersedia tidak selalu sesuai dengan kebutuhan dan tujuan belajar</li> </ul>
7. Televisi	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dapat memancarkan berbagai jenis bahan audio-visual</li> <li>• Dapat membawa dunia nyata ke rumah dan ke kelas</li> <li>• Menyajikan program – program yang dapat dipahami peserta didik</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hanya mampu menyajikan komunikasi satu arah</li> <li>• Guru tidak dapat merevisi film sebelum ditayangkan</li> <li>• Memungkinkan terdapat peserta didik yang pasif</li> </ul>
8. Komputer	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dapat merangsang peserta didik untuk mengerjakan latihan, melakukan kegiatan laboratorium karena tersedia animasi grafik, warna, dan musik yang dapat menambah realisme</li> <li>• Kendali berada di tangan peserta didik sehingga tingkat kecepatan belajar dapat disesuaikan dengan tingkat penguasaannya</li> <li>• Kemampuan merekam aktivitas peserta didik selama menggunakan suatu program pembelajaran memberi kesempatan lebih baik untuk pembelajaran secara perorangan</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Meskipun harga perangkat keras komputercenderung semakin menurun, pengembangan perangkat lunaknya masih relatif mahal</li> <li>• Diperlukan pengetahuan dan keterampilan khusus tentang komputer</li> <li>• Keragaman model komputer sering menyebabkan program yang tersedia untuk satu model tidak cocok dengan model lain</li> <li>• Hanya efektif bila digunakan oleh perorangan atau kelompok kecil</li> </ul>

### 1.3 Pengembangan perangkat pembelajaran

#### 2.3.1. Teori pengembangan perangkat

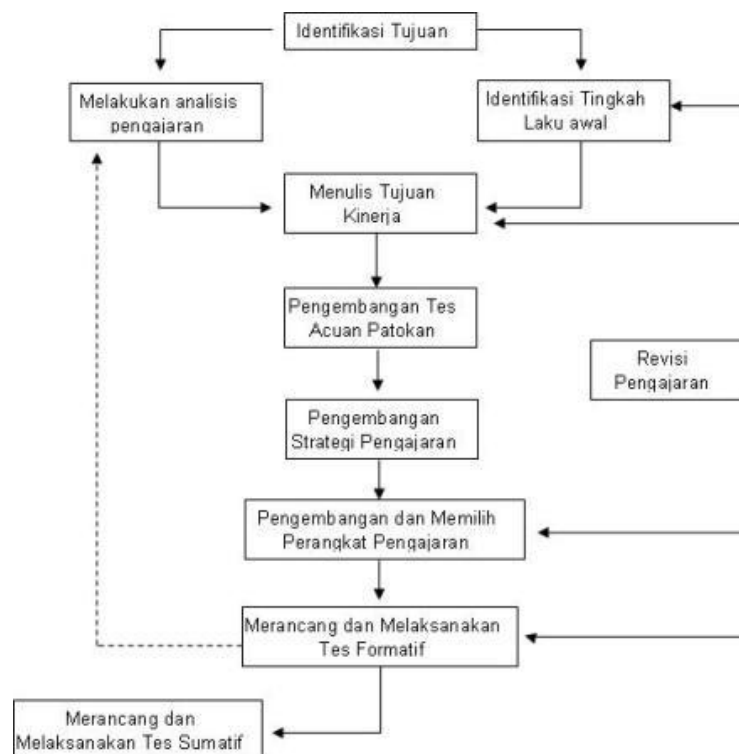
Pengembangan perangkat pembelajaran adalah serangkaian proses atau kegiatan yang dilakukan untuk menghasilkan suatu perangkat pembelajaran berdasarkan teori pengembangan yang telah ada. (Rusdi, 2008).

#### 2.3.2. Macam-macam model pengembangan perangkat pembelajaran

Ada beberapa macam model pengembangan perangkat pembelajaran, antara lain: model Dick and Carey, model 4D, model ADDIE, model Jerold E.Kemp, dan model ASSURE.

##### 1. Model Dick and Carey

Perancangan pengajaran menurut sistem pendekatan model Dick & Carey dikembangkan oleh Walter Dick & Lou Carey. Urutan perencanaan dan pengembangan ditunjukkan oleh bagan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Bagan pengembangan Dick and Carey

- 1) Identifikasi tujuan umum pembelajaran. Pada tahap ini dilakukan perumusan tujuan umum pembelajaran yang

berdasarkan pada karakteristik bidang studi, karakteristik peserta didik, dan kondisi lapangan.

- 2) Melakukan analisis instruksional. Setelah mengidentifikasi tujuan pembelajaran, maka dilakukan analisis untuk mengenali keterampilan-keterampilan bawahan yang mengharuskan peserta didik menguasanya dan langkah-langkah prosedural bawahan yang ada harus diikuti peserta didik untuk dapat belajar tertentu.
- 3) Mengidentifikasi karakteristik peserta didik. Tahap ini bertujuan untuk mengetahui kualitas perseorangan sehingga dapat dijadikan petunjuk dalam mendiskripsikan strategi pengelolaan pembelajaran. Aspek-aspek yang diungkap dalam tahap ini antara lain: bakat, motivasi, gaya belajar, kemampuan berpikir, minat atau kemampuan awal.
- 4) Merumuskan tujuan kinerja. Berdasarkan analisis instruksional dan pernyataan tentang tingkah laku awal peserta didik, selanjutnya akan dirumuskan pernyataan khusus tentang apa yang harus dilakukan peserta didik setelah menyelesaikan pembelajaran.
- 5) Pengembangan Tes Acuan Patokan. Pengembangan Tes Acuan Patokan didasarkan pada tujuan yang telah dirumuskan, pengembangan butir assesmen untuk mengukur kemampuan peserta didik seperti yang diperkirakan dalam tujuan
- 6) Pengembangan strategi Pengajaran. Informasi dari lima tahap sebelumnya, maka selanjutnya akan mengidentifikasi yang akan digunakan untuk mencapai tujuan akhir. Strategi akan meliputi aktivitas preinstruksional, penyampaian informasi, praktek dan balikan, testing, yang dilakukan lewat aktivitas.
- 7) Pengembangan atau Memilih Pengajaran. Tahap ini akan digunakan strategi pengajaran untuk menghasilkan

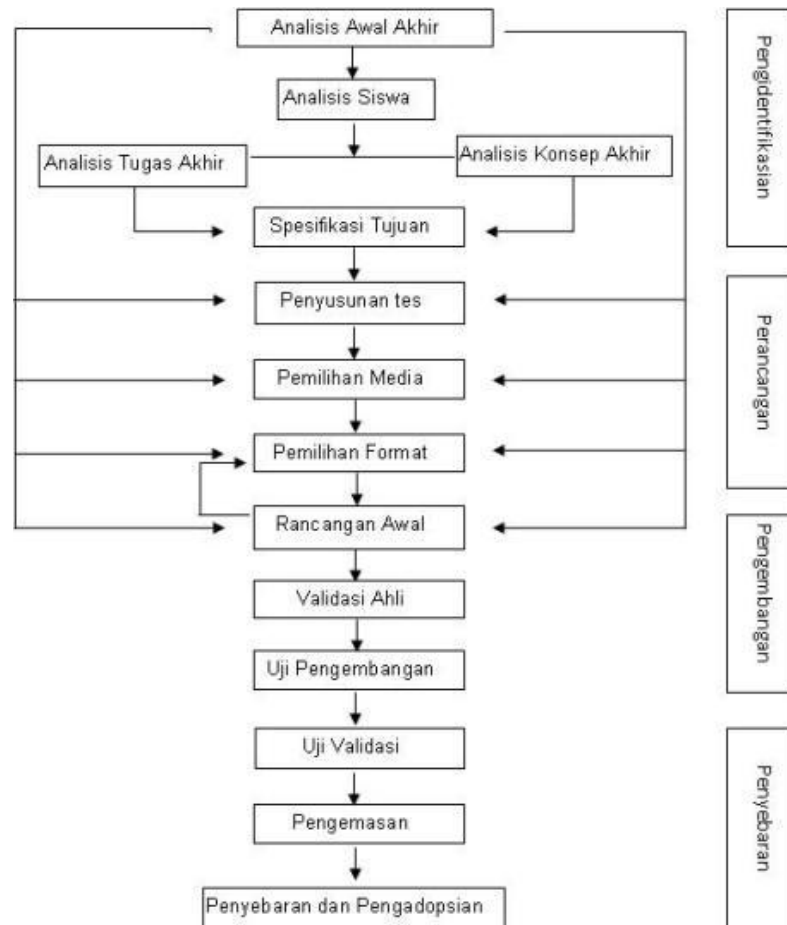


pengajaran yang meliputi petunjuk untuk peserta didik, bahan pelajaran, tes dan panduan guru.

- 8) Merancang dan Melaksanakan Evaluasi Formatif. Evaluasi dilakukan untuk mengumpulkan data yang akan digunakan untuk mengidentifikasi bagaimana meningkatkan pengajaran.
- 9) Menulis Perangkat. Hasil-hasil pada tahap di atas dijadikan dasar untuk menulis perangkat yang dibutuhkan. Hasil perangkat selanjutnya divalidasi dan diujicobakan di kelas/diimplementasikan di kelas.
- 10) Revisi Pengajaran (*instructional revisions*). Tahap ini mengulangi siklus pengembangan perangkat pengajaran. Data dari evaluasi sumatif yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya diringkas dan dianalisis serta diinterpretasikan untuk diidentifikasi kesulitan yang dialami oleh peserta didik dalam mencapai tujuan pembelajaran. Begitu pula masukan dari hasil implementasi dari pakar/validator.

## 2. Model 4D

Model pengembangan perangkat *Four-D Model* dikembangkan oleh Sivasailam Thiagarajan, Dorothy S. Semmel, dan Melvyn I. Semmel (1974). Model ini terdiri dari 4 tahap pengembangan yaitu *Define* (Pendefinisian), *Design* (Perancangan), *Develop* (Pengembangan), dan *Disseminate* (Penyebaran) (Trianto, 2007: 65 – 68). Tahapan pengembangan tersebut dapat digambarkan oleh bagan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Bagan pengembangan 4D

1) *Define* (Pendefinisian)

Tahap *define* adalah tahap untuk menetapkan dan mendefinisikan syarat-syarat pembelajaran. Tahap *define* ini mencakup lima langkah pokok, yaitu analisis ujung depan analisis peserta didik, analisis tugas, analisis konsep dan perumusan tujuan pembelajaran.

2) *Design* (Perancangan)

Tahap perancangan bertujuan untuk merancang perangkat pembelajaran. Empat langkah yang harus dilakukan pada tahap ini, yaitu: (1) penyusunan tes acuan patokan, tes disusun berdasarkan spesifikasi tujuan pembelajaran dan analisis peserta didik, kemudian selanjutnya disusun kisi-kisi tes hasil belajar, tes yang dikembangkan disesuaikan dengan jenjang kemampuan kognitif, penskoran hasil tes menggunakan panduan evaluasi yang memuat kunci dan

pedoman penskoran setiap butir soal. (2) pemilihan media yang sesuai dengan karakteristik materi dan tujuan pembelajaran, (3) pemilihan format, yakni mengkaji format-format bahan ajar yang ada dan menetapkan format bahan ajar yang akan dikembangkan, (4) membuat rancangan awal (*initial design*) sesuai format yang dipilih.

3) *Develop* (Pengembangan)

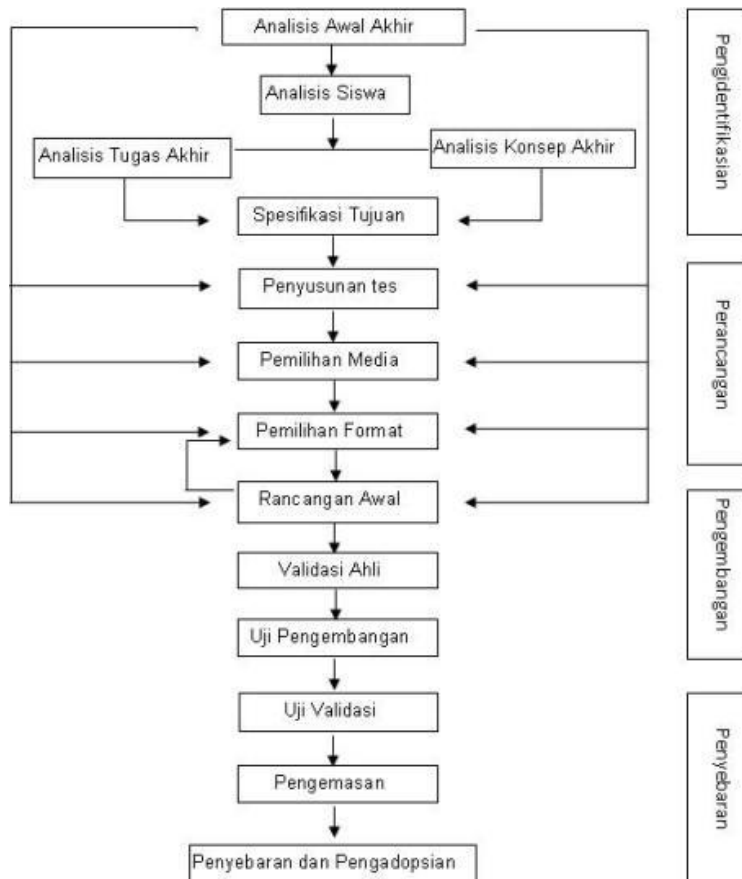
Tahap pengembangan adalah tahap untuk menghasilkan produk pengembangan yang dilakukan melalui dua langkah, yakni: (1) penilaian ahli yang diikuti dengan revisi, (2) uji coba pengembangan dengan kelas terbatas.

4) *Disseminate* (Penyebaran)

Tahap diseminasi dilakukan untuk mempromosikan produk pengembangan agar bisa diterima pengguna, baik individu, suatu kelompok, atau sistem. Diseminasi bisa dilakukan di kelas lain dengan tujuan untuk mengetahui efektifitas penggunaan perangkat dalam proses pembelajaran. Bentuk diseminasi ini dengan tujuan untuk mendapatkan masukan, koreksi, saran, penilaian, untuk menyempurnakan produk akhir pengembangan agar siap diadopsi oleh para pengguna produk.

3. Model ADDIE

Model ADDIE dikembangkan oleh Mollenda dan Rasier. Menurut Benny A. Pribadi (2009:125) model pengembangan ADDIE terdiri atas 5 langkah pokok, yaitu Analysis, Design, Development, Implementation, dan Evaluation. Tahapan penelitian tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 2.3 Bagan pengembangan ADDIE

1) Analisis

Tahap ini mengidentifikasi produk yang sesuai dengan sasaran peserta didik, tujuan belajar, mengidentifikasi isi atau materi pembelajaran, mengidentifikasi lingkungan belajar dan strategi penyampaian dalam pembelajaran.

2) Design

Kegiatan ini merupakan proses sistematis yang dimulai dari menetapkan tujuan belajar, merancang skenario atau kegiatan belajar mengajar, merancang perangkat pembelajaran, merancang materi pembelajaran dan alat evaluasi hasil belajar. Rancangan media pembelajaran ini masih bersifat konseptual dan akan mendasari proses pengembangan berikutnya.

3) Development

Development dalam model ADDIE berisi kegiatan realisasi rancangan produk. Dalam tahap pengembangan, kerangka yang masih konseptual pada tahap Design direalisasikan menjadi produk yang siap diimplementasikan.

4) Implementation

Pada tahap ini diimplementasikan media yang telah dikembangkan pada situasi yang nyata yaitu di kelas. Selama implementasi, rancangan media yang telah dikembangkan diterapkan pada kondisi yang sebenarnya. Setelah penerapan, dilakukan evaluasi awal untuk memberi umpan balik pada penerapan media berikutnya.

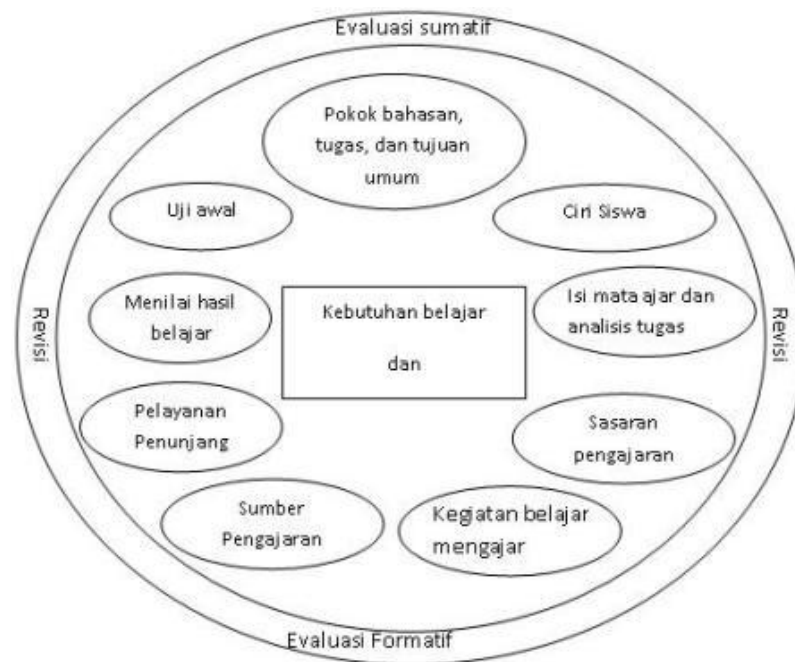
5) Evaluation

Evaluasi dilakukan dalam dua bentuk yaitu evaluasi formatif dan sumatif. Evaluasi formatif dilaksanakan pada akhir setiap tahap sedangkan evaluasi sumatif dilakukan setelah kegiatan berakhir secara keseluruhan. Revisi dibuat sesuai dengan hasil evaluasi atau kebutuhan yang belum dapat dipenuhi oleh media tersebut.

4. Model Jerold E.Kemp

Menurut Kemp (dalam, Trianto, 2007: 53) Pengembangan perangkat merupakan suatu lingkaran yang kontinum. Tiap-tiap langkah pengembangan berhubungan langsung dengan aktivitas revisi. Pengembangan perangkat ini dimulai dari titik manapun sesuai di dalam siklus tersebut.

Secara umum model pengembangan model Kemp ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Bagan pengembangan Kemp

Model pengembangan sistem pembelajaran ini memuat pengembangan perangkat pembelajaran. Terdapat sepuluh unsur rencana perancangan pembelajaran. Kesepuluh unsur tersebut adalah:

- 1) Identifikasi masalah pembelajaran, tujuan dari tahapan ini adalah mengidentifikasi antara tujuan menurut kurikulum yang berlaku dengan fakta yang terjadi di lapangan baik yang menyangkut model, pendekatan, metode, teknik maupun strategi yang digunakan guru.
- 2) Analisis Peserta didik, analisis ini dilakukan untuk mengetahui tingkah laku awal dan karakteristik peserta didik yang meliputi ciri, kemampuan dan penguasaan baik individu maupun kelompok.
- 3) Analisis Tugas, analisis ini adalah kumpulan prosedur untuk menentukan isi suatu pengajaran, analisis konsep, analisis pemrosesan informasi, dan analisis prosedural yang digunakan untuk memudahkan pemahaman dan penguasaan tentang tugas-tugas belajar dan tujuan pembelajaran yang

dituangkan dalam bentuk Rencana Program Pembelajaran (RPP) dan lembar kegiatan siswa (LKS)

- 4) Merumuskan Indikator, Analisis ini berfungsi sebagai (a) alat untuk mendesain kegiatan pembelajaran, (b) kerangka kerja dalam merencanakan mengevaluasi hasil belajar peserta didik, dan (c) panduan peserta didik dalam belajar.
- 5) Penyusunan Instrumen Evaluasi, Bertujuan untuk menilai hasil belajar, kriteria penilaian yang digunakan adalah penilaian acuan patokan, hal ini dimaksudkan untuk mengukur ketuntasan pencapaian kompetensi dasar yang telah dirumuskan.
- 6) Strategi Pembelajaran, Pada tahap ini pemilihan strategi belajar mengajar yang sesuai dengan tujuan. Kegiatan ini meliputi: pemilihan model, pendekatan, metode, pemilihan format, yang dipandang mampu memberikan pengalaman yang berguna untuk mencapai tujuan pembelajaran.
- 7) Pemilihan media atau sumber belajar, Keberhasilan pembelajaran sangat tergantung pada penggunaan sumber pembelajaran atau media yang dipilih, jika sumber-sumber pembelajaran dipilih dan disiapkan dengan hati-hati, maka dapat memenuhi tujuan pembelajaran.
- 8) Merinci pelayanan penunjang yang diperlukan untuk mengembangkan dan melaksanakan dan melaksanakan semua kegiatan dan untuk memperoleh atau membuat bahan.
- 9) Menyiapkan evaluasi hasil belajar dan hasil program.
- 10) Melakukan kegiatan revisi perangkat pembelajaran, setiap langkah rancangan pembelajaran selalu dihubungkan dengan revisi. Kegiatan ini dimaksudkan untuk mengevaluasi dan memperbaiki rancangan yang dibuat.

#### 5. Model ASSURE

Model pengembangan ASSURE merupakan model pengembangan yang dikemukakan oleh Heinich dan kawan-

kawan (1982). Model ini menggambarkan langkah-langkah yang sistematis dan menyeluruh tentang aktifitas yang dilakukan untuk mendesain suatu perangkat pembelajaran. Langkah-langkah model ASSURE antara lain:

1) Analisis karakteristik peserta didik (*analyze learner characteristics*)

Smaldino dan kawan-kawan dalam Pribadi (2011: 42) mengemukakan empat faktor penting yang perlu diperhatikan dalam melakukan analisis karakteristik peserta didik, yaitu:

(1) Karakteristik umum

Menggambarkan tentang kondisi peserta didik seperti: usia, kelas, jenis kelamin peserta didik.

(2) Kemampuan awal peserta didik

Kompetensi atau kemampuan awal peserta didik menggambarkan tentang pengetahuan dan keterampilan yang sudah dan belum dimiliki oleh seseorang sebelum mengikuti program pembelajaran. Untuk mengetahui kemampuan awal atau *prerequisite*, yang merupakan persyaratan dalam mengikuti suatu program pembelajaran, diperlukan adanya pre-test. Hal ini dilakukan oleh guru untuk menghindari asumsi bahwa seluruh peserta didik telah memiliki kemampuan awal yang diperlukan sebelum mengikuti program pembelajaran. Atau dapat juga dilakukan dengan melakukan telaah kurikulum untuk mengetahui seberapa banyak materi yang telah diperoleh oleh peserta didik sebelumnya.

(3) Gaya belajar

Gaya belajar dapat didefinisikan sebagai suatu cara tentang bagaimana seorang individu melakukan persepsi, berinteraksi, dan merespon secara emosional terhadap lingkungan belajar.



Berdasarkan kemampuan untuk memahami jenis informasi tertentu, gaya belajar dapat diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu: (1) auditif, (2) visual, dan (3) kinestetik (Pribadi, 2011: 47).

**Tabel 2.2** Gaya belajar dan karakteristiknya

Gaya Belajar	Karakteristik
Auditif	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cenderung belajar dengan cepat dalam memahami pesan atau informasi yang disampaikan melalui unsur suara (<i>audio</i>).</li> <li>• Lebih menyukai mendengarkan pidato, ceramah, musik, dongeng, radio, dan lain-lain.</li> </ul>
Visual	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cenderung belajar dengan cepat dalam memahami pesan atau informasi yang disampaikan melalui unsur gambar atau visual.</li> <li>• Lebih menyukai melihat gambar atau diagram, menonton video atau pertunjukan, demonstrasi suatu kegiatan, dan lain-lain.</li> </ul>
Kinestetik	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cenderung belajar dengan cepat dalam memahami pesan atau informasi yang disampaikan melalui aktifitas fisik dan melibatkan diri secara langsung.</li> <li>• Lebih menyukai suatu pekerjaan yang dilakukan secara langsung, seperti menyusun puzzle, membongkar pasang sesuatu, dan lain-lain.</li> </ul>

#### (4) Motivasi

Motivasi dapat diartikan sebagai kondisi yang dapat mendorong individu untuk melakukan suatu tindakan dalam rangka mencapai tujuan atau bahkan menghindarinya.

#### 2) Tahap Menentukan Tujuan Pembelajaran (*State Objectives*)

Tahap menentukan tujuan pembelajaran yaitu perilaku atau kemampuan apa yang diharapkan dapat dimiliki peserta didik

dan dikuasai setelah proses belajar-mengajar selesai. Tujuan pembelajaran ini digunakan sebagai dasar menyusun rancangan perangkat pembelajaran.

3) Tahap Memilih, Memodifikasi atau Merancang Media (*Select, Modify or Design Media*)

Setelah tujuan pembelajaran ditentukan, maka langkah selanjutnya yang dilakukan adalah memilih media yang sesuai dengan tujuan pembelajaran. Perlu diperhatikan bahwa tidak semua media mampu membangkitkan minat peserta didik, sehingga dilakukan modifikasi atau perancangan media tersebut sehingga lebih menarik.

4) Tahap Penggunaan Media (*Utilize Media*)

Setelah memilih media yang tepat, diperlukan persiapan bagaimana dan berapa banyak waktu yang diperlukan untuk menggunakannya. Disamping melakukan uji coba terbatas, persiapan ruangan juga diperlukan seperti tata letak tempat duduk peserta didik, fasilitas yang diperlukan seperti meja peralatan, listrik, layar, dan lain-lain harus dipersiapkan sebelum uji coba.

5) Tahap Meminta Tanggapan dari Peserta Didik (*Requires Learner Respons*)

Peserta didik diminta untuk memberi tanggapan mengenai media yang sedang dikembangkan. Tanggapan atau respon peserta didik tersebut digunakan untuk perbaikan media yang sedang dikembangkan.

6) Tahap Evaluasi (*Evaluate*)

Dalam model desain pembelajaran ASSURE evaluasi dilakukan baik terhadap hasil belajar peserta didik maupun terhadap program pembelajaran itu sendiri. Evaluasi hasil belajar merupakan merupakan penilaian yang difokuskan pada pencapaian kompetensi peserta didik setelah mengikuti

program pembelajaran. Sedangkan evaluasi program lebih ditekankan pada penilaian kualitas program pembelajaran.

Evaluasi ini dilakukan dua kali, yaitu yang pertama evaluasi formatif yang dilakukan ketika program masih berlangsung untuk diidentifikasi hambatannya, yang kedua evaluasi sumatif yang dilakukan setelah program berakhir. Setelah dilakukan evaluasi maka dilakukan revisi untuk menyempurnakan media yang dikembangkan.

Pada pengembangan media pembelajaran ini, peneliti menggunakan model ASSURE karena menurut peneliti langkah-langkah yang disajikan praktis dan mudah dipahami, diterapkan dan sesuai dengan tujuan penelitian.

### 2.3.3 Aspek-aspek pengembangan perangkat pembelajaran

Menurut Nievenn dalam Hobri (2010:27), suatu media pembelajaranyang dikatakan berkualitas jika memenuhi aspek-aspek validitas (validity),kepraktisan (practicy) dan keefektifan (effectiveness).

#### 1. Valid

Validitas dari suatu perangkat pembelajaran dilihat dari apakah berbagai komponen dari perangkat pembelajaran itu terkait secara konsisten antara satu dengan lainnya. Valid atau tidaknya media pembelajaran ditentukan oleh data yang diperoleh dari para ahli. Para ahli adalah para validator yang berkompeten untuk memberikan penilaian tentang media pembelajaran dan memberikan saran atau komentar pada lembar validasi untuk menyempurnakan produk yang dikembangkan.

Yamasari (2010:2) menyatakan bahwa penilaian para ahli meliputi tiga aspek, yaitu:

#### a. Aspek format

- 1) Kejelasan petunjuk penggunaan dan pengerjaan.
- 2) Kesesuaian format sebagai media pembelajaran.

- 3) Kesesuaian isian pada media pembelajaran dengan definisi yang diinginkan.
  - 4) Kesesuaian jawaban pada media pembelajaran dengan definisi yang diinginkan.
  - 5) Kesesuaian *setting* gambar, suara, animasi dengan materi dan kesesuaian tombol-tombol program.
- b. Aspek isi
- 1) Penyusunan materi pada program komputer.
  - 2) Kesesuaian materi, contoh soal, dan latihan dengan indikator.
  - 3) Kesesuaian fungsi media sebagai alat untuk memudahkan peserta didik untuk menguasai materi.
- c. Aspek bahasa
- 1) Kebakuan bahasa yang digunakan
  - 2) Kemudahan peserta didik dalam memahami bahasa yang digunakan

Sedangkan menurut Arsyad (2011: 107-111), prinsip-prinsip pembuatan media pembelajaran yang mengandung unsur visual harus memperhatikan beberapa aspek, yaitu:

- a. Kesederhanaan  
Bentuk media harus ringkas, sederhana, dan dibatasi pada hal-hal yang penting saja. Konsep tergambar dengan jelas, tulisan jelas, sederhana dan mudah dibaca.
- b. Keterpaduan  
Keterpaduan ini mengacu pada hubungan antara elemen-elemen yang saling terkait dan menyatu sebagai suatu bentuk yang menyeluruh sehingga dapat membantu pemahaman informasi yang dikandungnya.
- c. Penekanan  
Penekanan dapat ditunjukkan dengan penggunaan ukuran, hubungan-hubungan, warna, dan sebagainya.

d. Keseimbangan

Ada dua macam keseimbangan, yaitu keseimbangan formal yang keseluruhannya simetris dan keseimbangan informal yang tidak keseluruhannya simetris.

e. Bentuk

Bentuk yang aneh dan asing bagi peserta didik dapat membangkitkan minat dan perhatian.

f. Warna

Ada tiga hal yang penting yang harus diperhatikan ketika menggunakan warna, yaitu: pemilihan warna khusus (merah, biru, kuning, hijau, dsb), nilai warna (tingkat ketebalan dan ketipisan warna), intensitas atau kekuatan warna itu untuk memberikan dampak yang diinginkan.

Dalam penelitian ini, kevalidan media pembelajaran menggunakan *multimedia* berbasis *articulate* yang dikembangkan didasarkan pada penilaian para ahli materi yang meliputi aspek format, isi dan bahasa, sedangkan penilaian dari para ahli media meliputi kesederhanaan, keterpaduan, penekanan, keseimbangan, bentuk dan warna.

2. Praktis

Untuk mengukur tingkat kepraktisan produk yang dihasilkan dari pengembangan media pembelajaran dapat dilihat dari apakah guru atau pakar-pakar lainnya mempertimbangkan bahwa produk tersebut mudah dan dapat digunakan oleh guru dan peserta didik. Produk dikatakan praktis jika para ahli menyatakan bahwa produk dapat digunakan dengan sedikit atau tanpa revisi. Sehingga dalam penelitian ini, produk yang dikembangkan dikatakan praktis jika produk tersebut dapat digunakan tanpa revisi atau sudah diperbaiki atau revisi sesuai saran dan komentar dari para ahli yang diisi pada lembar telaah.

### 3. Efektif

Pengembangan perangkat pembelajaran dikatakan efektif jika memenuhi kriteria berikut:

- a. Prosentase rata-rata dari aktivitas peserta didik yang aktif lebih besar dari pada aktivitas peserta didik yang cukup aktif dan tidak aktif
- b. Prosentase ketuntasan belajar secara klasikal lebih dari 75% dari seluruh peserta didik
- c. Hasil respon peserta didik dikategorikan baik atau positif.

Dalam penelitian ini, media pembelajaran matematika yang dikembangkan dikatakan efektif jika ketuntasan klasikal peserta didik terpenuhi, peserta didik yang aktif mencapai lebih dari 50% dan respon peserta didik termasuk kategori positif.

#### 1.4 *Multimedia* berbasis *Articulate*

*Articulate* merupakan salah satu *Software Mix Programming Tools* yang dapat membantu para desainer pembelajaran modern berbasis digital mulai dari kalangan pemula hingga profesional. Program *Articulate* ini dikatakan sebagai salah satu program aplikasi yang didukung oleh *smart brainware* secara sederhana dengan prosedur tutorial interaktif melalui template yang dapat dipublish secara offline maupun online sehingga memudahkan user memformatnya dalam bentuk *web personal*, CD, *word processing*, dan *Learning Management System (LMS)*. (Darmawan, 2012:137).

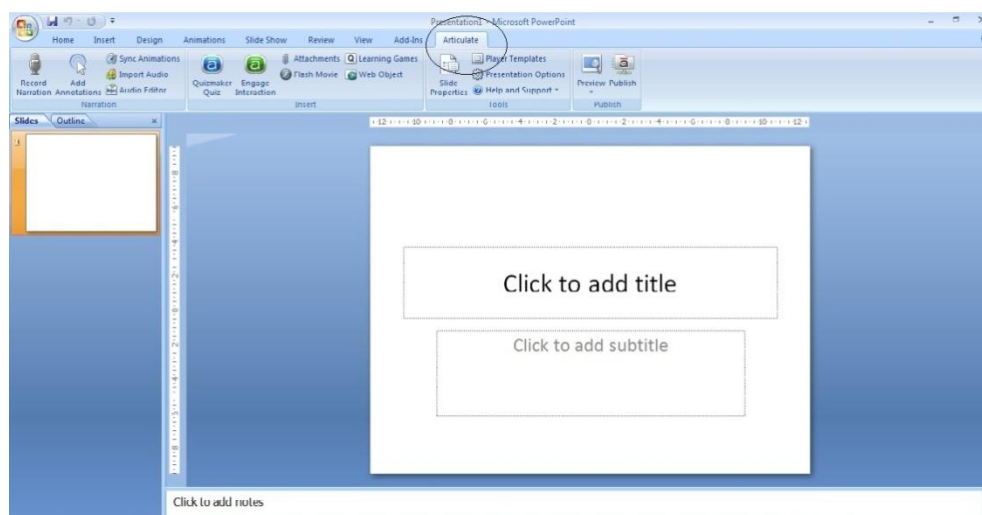
Program *articulate* terdiri atas *articulate Engange* (digunakan untuk membuat presentasi berupa tutorial), *articulate Quizmaker* (digunakan untuk membuat presentasi berupa Quis atau soal), *articulate Presenter*, dan *articulate Movemaker* (digunakan untuk membuat presentasi berupa video). Keempat *articulate* ini memiliki fungsi yang berbeda satu sama lain, tetapi ditujukan untuk membangun sebuah program interaktif secara terintegrasi, ketika keempat product *articulate* masing-masing telah dipublish oleh programmer. Programmer dalam hal ini bisa siapa saja yaitu dosen, guru, maupun profesional, dapat melakukan hosting sendiri produk *articulatenya* ke alamat <https://articulate.online.com>. File dalam bentuk

program *articulate* yang telah dipublish dapat diakses semua dengan syarat harus memiliki login dan password sesuai dengan yang diminta oleh admin dari pengelola *articulate*.

Program *articulate* yang telah dinstal dalam komputer akan terintegrasi dengan kelompok aplikasi microsoft office, yaitu microsoft power point. Pada menu fulldown akan terlihat aplikasi *articulate*. Sehingga memudahkan dalam membangun program pembelajaran multimedia, khususnya bagi pemula. Namun program ini hanya memiliki 30 hari free trial, sehingga tidak dapat digunakan secara terus menerus.

#### a. *Articulate presenter*

*Articulate presenter* ini digunakan untuk membuat presentasi melalui *powerpoint* dan menggabungkan presentasi dengan *quiz* yang dibuat pada *articulate quizmaker*, video yang dibuat pada *articulate movemaker* dan interaksi atau tutorial yang dibuat pada *articulate engange*. Selain itu pada *articulate presenter* ini, presentasi yang dibuat dapat ditambahkan dengan *flash* dan *audio*, juga dapat diberikan waktu untuk tampilan tiap *slide* sehingga dapat disesuaikan dengan *audio* yang diberikan.

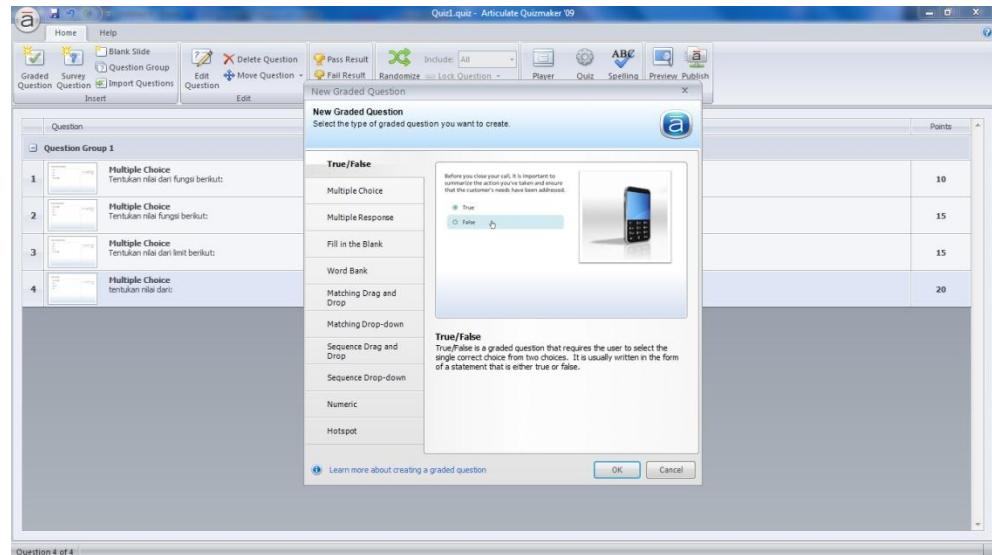


**Gambar 2.5** Tampilan *Articulate* pada Microsoft Power Point

#### b. *Articulate quizmaker*

*Articulate quizmaker* digunakan untuk membuat soal kuis (*graded quiz*) dan pertanyaan *survey*. *Articulate quizmaker* yang digunakan untuk membuat soal kuis (*graded quiz*) dapat membuat satu atau lebih kuis

yang tiap soalnya memiliki skor masing-masing, dan skor dapat disesuaikan dengan tingkat kesulitan dari soal yang dibuat. *Graded quiz* memiliki beberapa pilihan type pertanyaan diantaranya: *true/false*, *multiple choice*, *multiple responses*, *fill in the blank*, *word bank*, dan lain-lain.



**Gambar 2.6** Tampilan *ArticulateQuizmaker*

c. *Articulate Engage*

Program ini digunakan untuk membuat program presentasi materi pembelajaran berupa model tutorial. Program ini dapat digunakan untuk mengembangkan beberapa logika atau alur pembelajaran mulai dari yang bertipe *linear* hingga *branching*.



**Gambar 2.7** Tampilan *ArticulateEngage*



d. *Articulate Movemaker*

*Articulate movemaker* ini digunakan untuk membuat atau mengedit video yang mendukung presentasi yang akan dibuat.

## 2.5 Limit Fungsi

### 2.5.1. Konsep limit fungsi

Seekor anjing akan berlomba lari dengan seekor kura-kura dengan syarat pada detik berikutnya jarak yang ditempuh  $\frac{1}{10}$  jarak sebelumnya. Anjing berlari dengan kelajuan 10 m/detik dan kura-kura hanya 1 m/detik. Oleh karena kura-kura lebih lambat diputuskan kura-kura start 10 meter didepan anjing.

Oleh karena anjing berlari jauh lebih cepat daripada kura-kura, anjing merasa akan dapat menangkap kura-kura. Masalahnya, begitu anjing menempuh jarak 10 meter pertama dan tiba di tempat kura-kura mula berada, kura-kura telah melaju 1 meter, dan masih memimpin didepan anjing. Saat anjing telah menempuh jarak 1 meter, kura-kura telah maju lagi 0,1 meter sehingga masih tetap memimpin di depan. Demikian seterusnya, anjing terus mendekat dan lebih dekat ke kura-kura, tetapi tidak pernah berhasil menangkap kura-kura.

Masalah anjing dan kura-kura tersebut merupakan suatu paradoks yang sangat terkenal dari filsuf Zeno dari Elen.

Masalah ini dapat dituliskan pada persamaan aljabar. Caranya, yaitu menghitung total jarak yang ditempuh anjing dari sebelah kiri dan kura-kura dari sebelah kanan, dengan  $t$  menyatakan selang waktu (dalam detik) ketika anjing berhasil menangkap kura-kura. Persamaannya adalah sebagai berikut:

$$(10 \text{ m/detik})t = (1 \text{ m/detik})t + 10 \text{ m}$$

Penyelesaiannya adalah  $t = 1\frac{1}{9} \text{ detik}$ . Pada saat itu, anjing telah berlari sejauh  $(10 \text{ m/detik})\left(1\frac{1}{9} \text{ detik}\right) = 11\frac{1}{9} \text{ meter}$ .

Teka-teki yang diajukan Zeno dan pendengar paradoksnya adalah bagaimana bisa terjadinya bahwa

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 11\frac{1}{9} \dots (*)$$

Ruas kiri dari persamaan (\*) menyatakan penjumlahan bilangan-bilangan dengan karakteristik tertentu tanpa batas, sedangkan ruas kanannya menyatakan suatu hasil tertentu.

Jika ditulis ulang ruas kiri dalam persamaan (\*) seperti berikut.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Jika diperhatikan secara seksama, penjumlahan tersebut merupakan deret geometri, dengan suku pertama  $U_1 = 10$ , rasio  $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{10}$  dengan banyaknya suku  $n$  yang tak hingga.

Perhatikan bahwa jumlah nilai yang tanpa batas (disebut tak hingga) dengan dituliskan dengan lambang " $\infty$ " (bukanlah merupakan suatu bilangan)

Sesuai dengan rumus deret geometri, penjumlahan tanpa batas tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U_1 \left[ 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 \left[ 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}}$$

Sekarang masalahnya adalah bagaimana cara menghitungnya sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 \left[ 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}} = 11\frac{1}{9} \dots (**)$$

Oleh karena itu, perlu dipelajari cara menghitung limit fungsi aljabar di  $x \rightarrow \infty$ .

Pengertian Limit di Tak Hingga

Fungsi  $f(x) = \frac{1}{x}$  ketika  $x$  mendekati tak hingga dapat di tunjukkan oleh tabel berikut:

**Tabel 2.3** Nilai  $f(x) = \frac{1}{x}$ 

$x$	$f(x) = \frac{1}{x}$
10	0,1
100	0,01
1.000	0,001
10.000	0,0001
100.000	0,00001
1.000.000	0,000001
$\vdots$	$\vdots$

Dari tabel 2.2 tampak bahwa ketika  $x$  meningkat tanpa batas dengan nilai-nilai positif, nilai  $f(x)$  semakin mendekati nol. Pernyataan ini dapat ditulis dalam limit sebagai berikut.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Begitu pula dengan limit  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  atau  $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x^3}$  dan seterusnya ketika  $x \rightarrow \infty$  dengan cara seperti tabel 2.2 akan diperoleh bahwa untuk  $x \rightarrow \infty$  semua limit tersebut *mendekati 0*.

Jadi,

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Secara umum dapat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, \text{ dengan } n > 0$$

Dengan demikian, dapat diterapkan rumus tersebut untuk menjawab teka-teki yang diajukan zenon, yaitu bagaimana bisa

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 11\frac{1}{9}?$$

Sebelumnya, telah dibahas bahwa pernyataan dalam ruas kiri adalah sebuah deret geometri (persamaan (\*\*))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 \left[ 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}} = 11 \frac{1}{9}$$

Jika  $n = \infty$  disubstitusikan, akan diperoleh

$$\frac{10[1 - 0]}{1 - \frac{1}{10}} = 11 \frac{1}{9}$$

$$\frac{10}{\frac{9}{10}} = 11 \frac{1}{9}$$

$$\frac{100}{9} = 11 \frac{1}{9}$$

$$11 \frac{1}{9} = 11 \frac{1}{9}$$

Dengan demikian terjawablah teka-teki yang diajukan Zeno.

### 2.5.2. Menyelesaikan Limit Fungsi

A. Penyelesaian  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Untuk fungsi  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$  dapat diselesaikan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan  $x$  berpangkat tertinggi.

- Jika  $m = n$

maka penyelesaian dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$

adalah:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^n}{x^n} + \frac{bx^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{c}{x^n}}{\frac{px^m}{x^n} + \frac{qx^{m-1}}{x^n} + \dots + \frac{r}{x^n}} \end{aligned}$$

Pembilang dan penyebut dibagi dengan  $x^n$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \dots + \frac{c}{x^n}}{p + \frac{q}{x} + \dots + \frac{r}{x^n}}$$

Karena  $m = n$  maka  $\frac{px^m}{x^n} = \frac{px^m}{x^m} = p$

Sifat limit

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

dan

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \\ &+ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} p + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r}{x^n}}$$

$$= \frac{a + 0 + \dots + 0}{p + 0 + \dots + 0}$$

$$= \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

- Jika  $m > n$

maka penyelesaian dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$

adalah:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^n}{x^m} + \frac{bx^{n-1}}{x^m} + \dots + \frac{c}{x^m}}{\frac{px^m}{x^m} + \frac{qx^{m-1}}{x^m} + \dots + \frac{r}{x^m}}$$

Pembilang dan penyebut dibagi dengan  $x^m$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x^{m-n}} + \frac{b}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{c}{x^m}}{p + \frac{q}{x} + \dots + \frac{r}{x^m}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^{m-n}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x^{m-n+1}} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^m}}{\lim_{x \rightarrow \infty} p + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r}{x^m}}$$

Sifat limit  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x)$

$$= \frac{0 + 0 + \dots + 0}{p + 0 + \dots + 0}$$

Karena  $m > n$  maka  $m - n > 0$  dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$= 0$$

- Jika  $m < n$

maka penyelesaian dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$

adalah:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{px^m + qx^{m-1} + \dots + r}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^n}{x^n} + \frac{bx^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{c}{x^n}}{\frac{px^m}{x^n} + \frac{qx^{m-1}}{x^n} + \dots + \frac{r}{x^n}}$$

Pembilang dan penyebut dibagi dengan  $x^n$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \dots + \frac{c}{x^n}}{\frac{p}{x^{n-m}} + \frac{q}{x^{n-m+1}} + \dots + \frac{r}{x^n}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{x^{n-m}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x^{n-m+1}} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r}{x^n}}$$

Sifat limit  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x)$

$$= \frac{a + 0 + \dots + 0}{0 + 0 + \dots + 0}$$

$$= \infty$$

Karena  $n > m$  maka  $n - m > 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Dapat juga dirumuskan untuk fungsi pecahan  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , dengan  $ax^n$  dan  $px^m$  masing-masing adalah suku dalam  $f(x)$  dan  $g(x)$  dengan pangkat  $x$  tertinggi, berlaku:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{px^m}$$

Contoh:

Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^2 + 7x - 1}$  adalah...

Jawab:

Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^2 + 7x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$ , maka penyelesaiannya adalah

sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^2 + 7x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{5x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

B. Penyelesaian  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \infty - \infty$

Untuk memahami limit bentuk seperti ini, maka perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh:

Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 2x}$  adalah...

Jawab:

Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 2x} = \infty - \infty$ , maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} \\ &= 1 \end{aligned}$$