

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 HAKIKAT MATEMATIKA

2.1.1 Pengertian Matematika

Menurut Hudojo (1990: 2) sampai saat ini belum ada kesepakatan yang jelas dari para ilmuwan matematika tentang definisi atau pandangan tentang matematika. Bahkan ada yang menyebutkan bahwa berbagai pendapat yang muncul berkaitan dengan pengertian matematika merupakan hasil dari pengetahuan dan pengalaman yang berbeda dari masing-masing ilmuwan matematika (Suherman, 2003: 15). Hal ini disebabkan oleh ilmu matematika itu sendiri, dimana matematika termasuk disiplin ilmu yang memiliki kajian sangat luas, sehingga penjelasan mengenai apa dan bagaimana sebenarnya matematika itu akan mengalami perkembangan seiring dengan pengetahuan dan kebutuhan manusia yang mengikuti zaman (Fathani, 2009: 17).

Menurut Kamus Bahasa Indonesia (2008: 927) matematika didefinisikan sebagai ilmu tentang bilangan, hubungan antara bilangan, dan prosedur operasional yang digunakan dalam penyelesaian masalah mengenai bilangan. Sedangkan menurut istilah, matematika berarti ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan cara bernalar (Suherman, 2003: 16). Hal ini dimaksudkan bukan berarti ilmu lain diperoleh tidak melalui penalaran, akan tetapi dalam ilmu matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia *rasio* (penalaran), sedangkan dalam ilmu lain lebih menekankan hasil observasi atau pengamatan disamping penalaran. Matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran. Pada tahap awal matematika terbentuk dari pengalaman manusia dalam dunianya secara empiris, karena matematika sebagai aktivitas manusia kemudian pengalaman itu diproses dalam *rasio*, diolah secara analisis dan sintesis dengan penalaran, sehingga sampailah pada suatu kesimpulan yang berupa konsep-konsep matematika (2003: 16).

Menurut Fathoni (2009) ilmu matematika berbeda dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika memiliki bahasa sendiri, yaitu bahasa yang terdiri dari simbol-simbol dan angka. Bahasa yang dimaksud adalah bahasa *universal* (yang telah disepakati bersama) (Hudojo, 1990: 62). Sehingga konsep-konsep matematika yang telah terbentuk dapat dipahami orang lain dan dapat dengan mudah dimanipulasi secara tepat, maka digunakan bahasa matematika.

2.1.2 Bahasa Matematika

Menurut Galilei seperti yang dikutip oleh Sriyanto (2007: 19) bahasa merupakan suatu sistem yang terdiri dari lambang-lambang, kata-kata, dan kalimat-kalimat yang disusun menurut aturan tertentu dan digunakan sekelompok orang untuk berkomunikasi. Bahasa tumbuh dan berkembang karena manusia. Begitu pula sebaliknya, manusia berkembang karena bahasa. Hubungan manusia dan bahasa merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan salah satunya.

Matematika dapat dipandang sebagai bahasa karena dalam matematika terdapat sekumpulan lambang/simbol (2007: 19). Contohnya " \leq " yang melambangkan "kurang dari atau sama dengan", maupun kata yang diadopsi dari bahasa biasa seperti kata "fungsi" yang dalam matematika menyatakan suatu hubungan dengan aturan tertentu antara unsur-unsur dalam dua himpunan.

Sebagai bahasa, matematika memiliki kelebihan jika dibandingkan dengan bahasa-bahasa lainnya (2007: 20). Pertama, bahasa matematika memiliki makna tunggal, sehingga satu kalimat matematika tidak dapat ditafsirkan bermacam-macam. Bahasa matematika berusaha dan berhasil menghindari kerancuan arti, karena setiap kalimat (istilah atau variabel) dalam matematika sudah memiliki arti yang tertentu. Ketunggalan arti ini mungkin karena adanya kesepakatan matematikawan atau ditentukan sendiri oleh penulis di awal tulisannya. Dalam hal ini, orang dibebaskan untuk menggunakan istilah atau variabel matematika yang mengandung arti berlainan. Namun, harus menjelaskan terlebih dahulu di awal pembicaraan atau tulisannya bagaimana tafsiran yang diinginkan tentang istilah matematika tersebut.

Kedua, bahasa matematika juga mengembangkan bahasa numerik yang memungkinkan untuk melakukan pengukuran secara kuantitatif (2007: 21). Sedangkan bahasa verbal hanya mampu mengemukakan pernyataan yang bersifat

kualitatif. Jika kita menggunakan bahasa verbal, kita hanya dapat mengatakan bahwa A lebih cantik dari B dan kita tidak dapat berbuat apa-apa bila ingin mengetahui seberapa eksak derajat kecantikan si A. Namun, dengan bahasa matematika kita dapat mengetahui berapa derajat kecantikan seseorang secara eksak, salah satunya dengan menggunakan pendekatan logika *fuzzy*.

Fungsi lainnya bagi dunia keilmuan, matematika memiliki peran sebagai bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi yang cermat dan tepat (Sriyanto, 2007: 22). Matematika dalam komunikasi ilmiah memiliki peran ganda, yaitu sebagai ratu sekaligus pelayan ilmu. Sebagai ratu karena matematika merupakan bentuk tertinggi dari logika, sedangkan di sisi lain sebagai pelayan karena matematika memberikan bukan saja sistem organisasi ilmu yang bersifat logis, tetapi juga pernyataan-pernyataan dalam bentuk model matematika. Matematika bukan saja menyampaikan informasi secara jelas dan tepat, melainkan juga singkat. Suatu rumus jika ditulis dalam bahasa verbal membutuhkan rentetan kalimat yang banyak sekali, dimana makin banyak kata-kata makin besar juga peluang untuk terjadi salah informasi dan salah interpretasi, maka dalam bahasa matematika cukup ditulis dengan model yang sangat sederhana sekali. Dengan kata lain, ciri bahasa matematika adalah bersifat ekonomis.

2.1.3 Karakteristik Matematika

Setelah memahami uraian tentang definisi matematika di atas, tampak bahwa ilmu matematika mempunyai banyak ragam arti, penafsiran, dan pandangan. Namun, dibalik keragaman semua itu, dalam setiap arti, penafsiran, dan pandangan matematika, terdapat beberapa ciri atau karakteristik matematika yang secara umum telah disepakati oleh ilmuwan matematika, yaitu sebagai berikut.

a. Memiliki objek kajian yang bersifat abstrak

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap yang abstrak adalah matematika karena beberapa matematikawan menganggap bahwa objek matematika itu *konkret* dalam pikiran mereka. Ada empat objek kajian matematika, yaitu fakta (kesepakatan atau konvensi dalam matematika), konsep (ide yang dapat digunakan melalui definisi), operasi (aturan pengerjaan), dan prinsip (objek matematika yang kompleks) (Fathani, 2009: 59).

b. Mengacu pada kesepakatan

Simbol-simbol dan istilah-istilah dalam matematika merupakan kesepakatan atau konvensi yang penting. Dengan simbol dan istilah yang telah disepakati dalam matematika maka pembahasan selanjutnya akan menjadi mudah dilakukan dan dikomunikasikan. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian) dan konsep primitive (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan, *undefined term*) (Soedjadi, 2000: 16). Kesepakatan itu menjadikan pembahasan matematika untuk mudah dikomunikasikan. Aksioma diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pembuktian (*circulus in probando*). Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pendefinisian (*circulus in definiendo*) (Fathani, 2009: 67). Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan berbagai teorema. Dalam aksioma tentu terdapat konsep primitif tertentu. Dari satu atau lebih konsep primitif dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian (Soedjadi, 2000: 16).

c. Berpola pikir deduktif

Menurut Suherman (2003: 18) matematika dikenal sebagai ilmu deduktif. Ini berarti proses pengerjaan matematika harus bersifat deduktif. Matematika tidak menerima generalisasi berdasarkan pengamatan (induktif), tetapi harus berdasarkan pembuktian deduktif. Menurut Fathani (2009: 68) pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus. Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana, tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.

d. Memiliki simbol yang kosong dari arti

Dalam matematika terdapat banyak sekali simbol, baik yang berupa huruf latin, Yunani maupun simbol-simbol khusus lainnya. Rangkaian simbol-simbol dalam matematika dapat membentuk suatu model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Selain itu ada pula model matematika yang berupa gambar (*pictoral*) seperti bangun-bangun geometrik, grafik maupun diagram. Huruf-huruf yang digunakan dalam model persamaan, misalnya $x + y = z$ belum tentu bermakna atau berarti bilangan, demikian juga

dengan tanda + belum tentu berarti operasi tambah untuk dua bilangan. Jadi, secara umum huruf dan tanda dalam model $x + y = z$ masih kosong dari arti, terserah kepada yang akan memanfaatkan model itu. Kosongnya arti ini memungkinkan matematika memasuki medan garapan dari ilmu bahasa (*linguistik*).

e. Memperhatikan semesta pembicaraan

Sehubungan dengan kosongnya arti dari simbol-simbol matematika, menunjukkan dengan jelas bahwa dalam penggunaan matematika diperlukan kejelasan dalam lingkup apa model itu dipakai. Bila lingkup pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol diartikan bilangan. Bila lingkup pembicaraannya transformasi, maka simbol-simbol itu diartikan suatu transformasi. Lingkup pembicaraan itulah yang disebut dengan semesta pembicaraan. Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaiannya suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan. Contoh: Bila dijumpai model matematika $4x = 10$, kemudian akan dicari nilai x , maka penyelesaiannya tergantung pada semesta pembicaraan. Bila semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat maka tidak ada penyelesaiannya. Mengapa? Karena tidak ada bilangan bulat yang bila dikalikan 4 hasilnya 10. Bila semesta pembicaraannya bilangan rasional maka penyelesaian dari permasalahan adalah $x = 10 : 4 = 2,5$.

f. Konsisten dalam sistemnya

Dalam matematika terdapat berbagai macam sistem yang dibentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang berkaitan dan ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat pula beberapa sistem yang lain yang lebih kecil yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula di dalam sistem geometri. Di dalam geometri sendiri terdapat sistem-sistem yang lebih kecil atau sempit dan antar sistem saling berkaitan.

Dalam suatu sistem matematika berlaku hukum konsistensi atau ketaatazasan, artinya tidak boleh terjadi kontradiksi di dalamnya. Konsistensi ini mencakup dalam hal makna maupun nilai kebenarannya. Contoh: Bila kita mendefinisikan konsep trapesium sebagai “segiempat yang tepat sepasang sisinya

sejajar” maka kita tidak boleh menyatakan bahwa jajargenjang termasuk trapezium karena jajargenjang mempunyai dua pasang sisi sejajar.

2.2 PENGERTIAN KOMUNIKASI

Istilah komunikasi berasal dari bahasa latin, *communicatio*, yang bersumber dari kata *communis* yang berarti sama. Yang dimaksud sama di sini adalah sama makna atau pengertian. Sehingga orang-orang dikatakan berkomunikasi apabila di dalamnya terdapat kesamaan makna atau pengertian mengenai apa yang mereka bicarakan. Dalam Kamus Bahasa Indonesia (2008, 745) komunikasi diartikan sebagai pengiriman dan penerimaan pesan berita antar dua orang atau lebih sehingga pesan yang dimaksud dapat dipahami.

Komunikasi sebagai kata kerja (*verb*) dalam bahasa inggris, *communicate* berarti: untuk bertukar pikiran, perasaan, dan informasi; untuk menjadikan paham (tahu); untuk membuat sama; untuk mempunyai sebuah hubungan yang simpatik. Sedangkan dalam kata benda (*noun*) komunikasi berarti: pertukaran simbol, pesan-pesan yang sama, dan informasi; proses pertukaran diantara individu-individu melalui system simbol-simbol yang sama; seni untuk mengekspresikan gagasan-gagasan; dan ilmu pengetahuan tentang pengiriman informasi-informasi (Soyomukti, 2010: 55-56).

Menurut Effendi (2009: 9) komunikasi adalah berlangsungnya suatu kegiatan yang memiliki kesamaan makna mengenai apa yang dipercakapkan, komunikasi terjadi dalam bentuk verbal (lisan) atau nonverbal (tulisan). Sedangkan Barelson & Steiner (1964), seperti yang dikutip oleh Abdulhak & Deni (2013: 24) komunikasi merupakan proses penyampaian informasi, ide, emosi, keterampilan, dan seterusnya, melalui penggunaan simbol, kata, gambar, angka, grafik, dan lain-lain. Pakar Indonesia memberikan batasan tentang komunikasi diantaranya Effendy menyampaikan bahwa komunikasi adalah proses penyampaian pesan pikiran dan atau perasaan kepada orang lain dengan menggunakan simbol atau lambang sebagai media.

Komunikasi secara umum dapat diartikan sebagai suatu cara untuk menyampaikan suatu pesan dari pembawa pesan ke penerima pesan untuk memberitahu, pendapat, atau perilaku baik langsung secara lisan, maupun tak

langsung melalui media. Di dalam berkomunikasi tersebut harus dipikirkan bagaimana caranya agar pesan yang disampaikan seseorang itu dapat dipahami oleh orang lain. Untuk mengembangkan kemampuan berkomunikasi, orang dapat menyampaikan dengan berbagai bahasa termasuk bahasa matematis.

Komunikasi memegang peranan penting dalam dunia pendidikan termasuk pendidikan matematika. Menurut Abdulhak & Deni (2013: 43) komunikasi dalam pendidikan prosesnya berlangsung secara primer, yaitu proses penyampaian pikiran atau perasaan seseorang kepada orang lain dengan menggunakan lambang seperti bahasa, isyarat, gambar, warna, dan lain sebagainya secara langsung mampu menerjemahkan pikiran atau perasaan komunikator kepada komunikan.

2.2.1 Komunikasi Matematis

Dalam pembelajaran matematika, komunikasi matematis merupakan salah satu kompetensi yang harus dimiliki oleh peserta didik dan berkaitan erat dengan kompetensi-kompetensi matematika lainnya. Menurut NCTM (2000: 60) bahwa komunikasi matematis merupakan bagian yang esensial dari matematika dan pembelajaran matematika, karena komunikasi merupakan cara untuk menyalurkan ide dan merefleksikan pemahaman tentang matematika. Peserta didik yang memperoleh kesempatan dan dorongan untuk berbicara, menulis, membaca, dan mendengarkan dalam pembelajaran matematika mendapatkan dua hal sekaligus, yaitu berkomunikasi untuk mempelajari matematika (*communicate to learn mathematics*) dan belajar berkomunikasi secara matematis (*learn to communicate mathematically*) (2000: 60).

Menurut Ansari (2016: 226) komunikasi matematis adalah komunikasi lisan dan tulisan. Komunikasi lisan seperti membaca, mendengar, diskusi, menjelaskan, dan sharing. Komunikasi tulisan merupakan pengungkapan ide matematika melalui fenomena dunia nyata seperti grafik, persamaan aljabar, atau bahasa sehari-hari. Sedangkan menurut Cai et al. (1996: 245) komunikasi lisan adalah suatu kegiatan untuk menyampaikan makna melalui ucapan kata-kata atau kalimat untuk menyampaikan ide atau gagasan. Komunikasi tulisan adalah suatu kegiatan untuk menyampaikan makna dengan menuliskan kata-kata, kalimat, gambar, atau simbol yang mengandung arti dan tujuan tertentu.

Pengertian komunikasi matematis dijelaskan pula oleh Clark (2005: 1) komunikasi matematis merupakan *way of sharing ideas and clarifying understanding. Through communication, ideas become objects of reflection, refinement, discussion, and amendment. The communication process helps build meaning and permanence for ideas and makes them public.* Komunikasi merupakan cara berbagi ide dan memperjelas pemahaman. Melalui komunikasi ide dapat dicerminkan, diperbaiki, didiskusikan, dan dikembangkan.

Dalam kaitannya dengan tujuan pembelajaran matematika, peserta didik dikatakan mampu dalam komunikasi secara matematis apabila dia mampu mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah. Komunikasi ide-ide, gagasan pada operasi atau pembuktian matematika banyak melibatkan kata-kata, lambang matematis, dan bilangan.

Menurut Wardhani (2010: 18) matematika merupakan alat komunikasi yang sangat kuat, teliti, tidak membingungkan. Menurut Brenner (1998: 155) komunikasi matematis berarti menggunakan bahasa dan simbol dalam kaidah matematika. Banyak persoalan ataupun informasi disampaikan dengan bahasa matematika, misalnya menyajikan persoalan atau masalah ke dalam model matematika yang dapat berupa diagram, persamaan matematika, grafik ataupun tabel. Mengomunikasikan gagasan dengan matematika lebih praktis, sistematis dan efisien.

Menurut Asikin (2001:3) uraian tentang peran penting komunikasi dalam pembelajaran matematika dideskripsikan sebagai berikut:

1. Komunikasi dimana ide matematika dieksploitasi dalam berbagai perspektif, membantu mempertajam cara berpikir peserta didik dan mempertajam kemampuan peserta didik dalam melihat berbagai keterkaitan materi matematika.
2. Komunikasi merupakan alat untuk “mengukur” pertumbuhan pemahaman, dan merefleksikan pemahaman matematika para peserta didik.
3. Melalui komunikasi, peserta didik dapat mengorganisasikan dan mengkonsolidasikan pemikiran matematika mereka.

Selain itu, dalam *Principle and Standards for School Mathematics* disebutkan bahwa program-program pembelajaran matematika dari pra-TK hingga kelas 12 hendaklah memberikan kesempatan kepada seluruh peserta didik untuk:

1. Mengatur dan menggabungkan pemikiran matematis mereka melalui komunikasi (*organize and consolidate their mathematical thinking through communication*)
2. Mengomunikasikan pemikiran matematis mereka secara logis dan jelas kepada teman-teman, guru, dan orang lain (*communicate their mathematical thinking coherently and clearly to peers, teachers, and others*)
3. Menganalisis dan mengevaluasi pemikiran serta strategi-strategi matematika orang lain (*analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others*)
4. Menggunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide-ide matematis dengan tepat (*use the language of mathematics to express mathematical ideas precisely*) (NCTM, 2000: 60)

Jadi, dapat disimpulkan bahwa komunikasi matematis merupakan kecakapan peserta didik dalam menyampaikan ide-ide matematisnya baik secara lisan, tertulis, gambar, diagram, menggunakan benda, menyajikan dalam bentuk aljabar, atau menggunakan simbol matematika. Dengan memiliki kemampuan komunikasi matematis yang baik, peserta didik akan lebih mudah dalam memahami konsep dan memecahkan permasalahan matematika. Untuk mengetahui dan menilai kemampuan komunikasi matematis dapat dilihat dari beberapa aspek atau kegiatan peserta didik.

Menurut Soemarmo dalam Hendriana dan Utari Soemarmo (2014: 30) mengidentifikasi indikator komunikasi matematis meliputi kemampuan:

- a. Melukiskan atau mengekspresikan benda nyata, gambar, dan diagram dalam bentuk ide atau simbol matematika;
- b. Menjelaskan ide, situasi, dan relasi matematik secara lisan dan tulisan dengan menggunakan benda nyata, gambar, grafik, dan ekspresi aljabar;
- c. Menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa atau simbol matematika atau menyusun model matematika suatu peristiwa;
- d. Mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika;
- e. Membaca dengan pemahaman suatu representasi matematika;
- f. Menyusun konjektur, menyusun argument, merumuskan definisi, dan generalisasi;
- g. Mengungkapkan kembali suatu uraian atau paragraf matematika dalam bahasa sendiri.

Sedangkan menurut Ansari (2016: 15) standard komunikasi matematis peserta didik dapat dilihat dari beberapa aspek berikut:

1. Kemampuan menyatakan ide-ide matematika dengan berbicara, menulis, demonstrasi dan menggambarannya dalam bentuk visual.
2. Memahami, menginterpretasi, dan mengevaluasi ide-ide matematis yang disajikan dalam tulisan, lisan, dan bentuk visual.
3. Menggunakan kosa kata/bahasa, notasi, dan struktur matematik untuk menyatakan ide, menggambar, hubungan, dan pembuatan model.

Dari beberapa aspek atau indikator tersebut digunakan untuk mencapai sasaran pada soal-soal matematika yang nantinya diberikan pada tes komunikasi matematis peserta didik untuk mencapai target dalam berkomunikasi matematis sehingga peserta didik tidak terlepas dalam target yang diinginkan. Dalam penelitian ini, aspek atau indikator yang digunakan untuk mengungkap kemampuan komunikasi matematis mengacu pada pendapat Ansari karena dianggap lebih jelas dalam mendeskripsikan setiap aspek-aspeknya. Selain itu, pada indikator tersebut lebih mudah dipahami dan mewakili semua indikator dalam komunikasi matematis. Indikator komunikasi matematis yang akan diukur dalam penelitian ini mengacu pada indikator komunikasi matematis tulis yang meliputi:

1. Kemampuan menyatakan ide-ide matematika dengan menulis dan menggambarannya dalam bentuk visual.
Kemampuan ini menekankan pada kemampuan peserta didik dalam menulis tentang ide-ide matematis yang dimiliki untuk menyelesaikan masalah. Selain itu, mengubah satu penyajian ke dalam bentuk penyajian lain seperti gambar merupakan cara penting untuk menambah pemahaman terhadap suatu ide karena dapat memperluas interpretasi nyata dari suatu soal. Jadi, untuk aspek pertama ini meliputi dua kemampuan yaitu menuliskan ide-ide matematis yang dimiliki serta membuat sketsa atau gambar tentang ide-ide matematis yang dimiliki.
2. Memahami, menginterpretasi, dan mengevaluasi ide-ide matematis yang disajikan dalam tulisan dan bentuk visual.
 - a. Kemampuan peserta didik dalam memahami ide-ide matematis yang terdapat dalam persoalan matematika. Artinya peserta didik harus dapat memahami

dengan baik apa yang dimaksudkan dari soal dan apa yang ditanyakan baik secara tulis sehingga dapat memperjelas dari suatu persoalan.

b. Kemampuan peserta didik dalam menginterpretasikan ide-ide matematis yang terdapat dalam persoalan matematika. Artinya peserta didik dapat menggunakan langkah-langkah dalam menemukan jawaban untuk memperjelas masalah.

c. Kemampuan peserta didik dalam mengevaluasi ide-ide matematis. Jadi, kemampuan ini menekankan pada peserta didik untuk memeriksa kembali jawaban sebelum dikumpulkan sehingga didapatkan kesimpulan.

3. Menggunakan kosa kata/bahasa, notasi, dan struktur matematik untuk menyatakan ide, menggambarkan, hubungan, dan pembuatan model.

Menurut Widiarti dan Pamuntjak (1999: 1) pemodelan matematis adalah suatu cara untuk mendeskripsikan beberapa fenomena kehidupan nyata dalam istilah matematika (secara matematika). Selanjutnya dalam NCTM (2000: 349) disebutkan ... *the students should use mathematical language and symbols correctly and appropriately*. Jadi kemampuan ini menekankan pada kemampuan peserta didik dalam melafalkan maupun menuliskan istilah-istilah, simbol-simbol matematika, dan struktur-strukturnya untuk menyatakan ide dan menggambarkan dengan tepat untuk memodelkan permasalahan matematika.

Untuk mengetahui kemampuan peserta didik dalam mengomunikasikan gagasan atau ide matematiknya dapat dilihat pada tabel di bawah ini, dimana untuk mengetahui komunikasi matematis peserta didik harus memenuhi kriteria penilaian yang terdapat pada tabel penilaian.

Tabel 2.1. Kriteria Penilaian Komunikasi Matematis

Level	Kriteria
4	Memberikan jawaban dengan jelas dan lengkap, penjelasan atau deskripsi tidak ambigu (bermakna ganda), dapat memasukkan suatu diagram yang tepat dan lengkap, mengomunikasikan secara efektif kepada audien, mengajukan argument pendukung yang kuat dan dapat diterima secara logis dan lengkap, dapat memasukkan contoh-contoh
3	Memberikan jawaban hampir lengkap dengan penjelasan atau deskripsi yang masuk akal, dapat memasukkan diagram yang hampir tepat dan lengkap. Secara umum mampu mengomunikasikan secara efektif kepada audien, mengajukan argument pendukung yang dapat diterima secara logis tetapi mengandung beberapa kesalahan kecil.

2	Membuat kemajuan yang berarti, tetapi penjelasan atau deskripsi agak ambigu atau kurang jelas, dapat membuat suatu diagram yang kurang betul atau kurang jelas, komunikasi atau jawaban agak samar-samar atau sulit diinterpretasi, argument kurang lengkap atau mungkin didasarkan pada premis yang diterima secara logis.
1	Gagal memberikan jawaban lengkap namun mengandung beberapa unsur yang benar, memasukkan suatu diagram yang tidak relevan dengan situasi soal atau diagram tidak jelas dan sulit diinterpretasi, penjelasan atau deskripsi menunjukkan alur yang tidak benar.
0	Komunikasi tidak efektif, dapat membuat diagram dengan tepat tetapi tidak mencerminkan situasi soal, kata-kata tidak merefleksikan soal.

Sumber: Ansari (2016: 111-112)

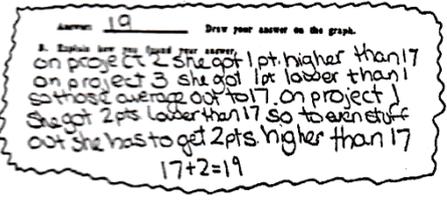
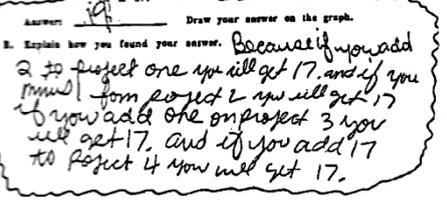
Tabel 2.2 Maryland Math Communication Rubric

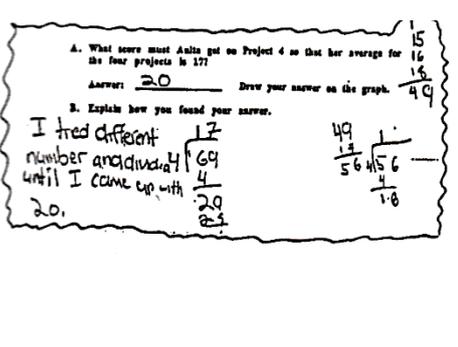
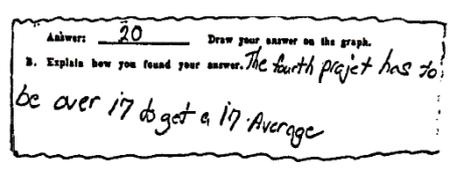
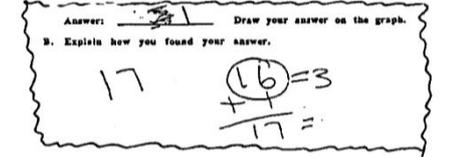
Level	Kriteria
4	Menggunakan bahasa matematika (istilah, simbol, tanda-tanda, dan / atau representasi) yang sangat efektif, akurat, dan menyeluruh, untuk menggambarkan operasi, konsep, dan proses.
3	Menggunakan bahasa matematika (istilah, simbol, tanda-tanda, dan / atau representasi) yang sebagian efektif, akurat, dan menyeluruh untuk menggambarkan operasi, konsep dan proses.
2	Menggunakan bahasa matematika (istilah, simbol, tanda-tanda dan / atau representasi) yang kurang efektif dan akurat, untuk menggambarkan operasi, konsep, dan proses.
1	Respon salah namun masih berusaha.
0	Tugas salah, topik salah, tidak terbaca, kosong atau tidak cukup untuk skor.

Sumber: Maryland State Department of Education (1991: 209)

Selain rubrik di atas Cai et al. juga menggambarkan bagaimana komunikasi yang dimiliki oleh peserta didik dari hasil tes tertulisnya sebagai berikut.

Tabel 2.3 Penilaian Respon Peserta Didik Menurut Cai et al.

Respon Peserta Didik	Keterangan
	Level 4 Pada level ini peserta didik dapat menjawab dengan benar dan menjelaskan dengan komplit tentang pemahamannya mengenai konsep rata-rata dalam menyelesaikan masalah.
	Level 3 Jawaban peserta didik benar. Penjelasan menunjukkan pemahaman tentang konsep rata-rata, tetapi kurang jelas dalam menjelaskan langkah-langkahnya.

	<p>Level 2 Peserta didik menunjukkan beberapa pemahaman yang berhubungan dengan konsep rata-rata dari permasalahan tetapi ada kesalahan dan tidak lengkap. Secara rinci peserta didik memiliki jawaban yang salah dan menggunakan taksiran dan strategi dalam mengecek jawaban, namun mereka berhenti dan tidak melanjutkan lagi dalam mengecek jawaban yang lain.</p>
	<p>Level 1 Peserta didik mempunyai jawaban yang salah dan dalam menjelaskan menunjukkan sedikit pemahaman tentang konsep rata-rata dalam kontes permasalahan.</p>
	<p>Level 0 Peserta didik mempunyai jawaban yang salah, langkah-langkah yang ditunjukkan tidak menjelaskan tentang pemahaman dari konsep rata-rata.</p>

Sumber: Cai et al. (1996: 243)

Dalam penilaian komunikasi matematis pada penelitian ini, menggunakan hasil gabungan dan modifikasi dari beberapa kriteria penilaian di atas, kemudian diklasifikasikan berdasarkan indikator dari komunikasi tulis yang digunakan.

Tabel 2.4 Rubrik Penilaian Komunikasi Tulis

Level	Kriteria
<p>4 (Lengkap dan benar)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dapat menuliskan ide-idenya dengan menggunakan bahasa, simbol, atau istilah-istilah dalam matematika dengan tepat dan lengkap • Peserta didik dapat membuat gambar dengan tepat dan lengkap. • Peserta didik dapat menuliskan apa yang diketahui dan ditanya dan langkah-langkah dalam menemukan jawaban secara terstruktur, runtut, dan jelas • Peserta didik dapat membuat model matematika secara tepat • Peserta didik dapat memberikan solusi akhir dengan benar, terdapat satuan dan kalimat dalam kesimpulan tepat.
<p>3 (Hampir lengkap dan benar)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dapat menuliskan ide-idenya dengan menggunakan bahasa, simbol, atau istilah-istilah dalam matematika namun terdapat kekurangan penulisan. • Peserta didik dapat membuat gambar dengan hampir tepat dan lengkap. • Peserta didik dapat menuliskan apa yang diketahui dan ditanya dan langkah-langkah dalam menemukan jawaban secara terstruktur, cukup lengkap, runtut, dan jelas namun terdapat satu tahapan terlewat tetapi tidak mempengaruhi jawaban.

	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dapat membuat model matematika hampir lengkap. • Peserta didik dapat memberikan solusi akhir dengan benar, tidak terdapat satuan dan kalimat dalam kesimpulan tepat.
2 (Sebagian benar)	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dapat menuliskan ide-idenya dengan menggunakan bahasa, simbol, atau istilah-istilah dalam matematika namun hanya sebagian yang benar. • Peserta didik dalam membuat gambar sebagian benar. • Peserta didik dapat menuliskan apa yang diketahui dan ditanya namun langkah-langkah dalam menemukan jawaban sebagian benar. • Peserta didik dalam membuat model matematika sebagian benar. • Peserta didik dapat memberikan solusi akhir namun kurang tepat dalam perhitungan, tidak terdapat satuan dan kalimat dalam kesimpulan kurang tepat.
1 (Prosedur samar)	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dalam menuliskan ide-idenya tidak sesuai dengan maksud soal. • Peserta didik kurang tepat dalam membuat gambar. • Peserta didik menuliskan apa yang diketahui dan ditanya namun langkah-langkah dalam menemukan jawaban kurang menunjukkan pemahaman dari konsep soal. • Peserta didik dalam membuat model matematika sebagian benar. • Peserta didik memberikan solusi akhir tidak tepat, tidak terdapat satuan, mungkin tidak memberikan solusi akhir atau jawaban belum selesai
0 (Tidak menunjukkan solusi)	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dalam menuliskan idenya tidak akurat, tidak jelas dan tidak sesuai dengan maksud soal. • Peserta didik menuliskan yang diketahui, ditanya, dan langkah-langkah dalam menemukan jawaban tidak runtut, atau hanya menuliskan yang diketahui dan ditanya. • Perhitungan tidak benar

Untuk mengukur komunikasi matematis dapat dilihat melalui rubrik komunikasi di atas. Dimana peserta didik harus memenuhi kriteria yang ada pada rubrik. Jika salah satu kriteria tidak dipenuhi maka peserta didik turun pada level di bawahnya.

2.3 PENGERTIAN PENALARAN

Penalaran berasal dari kata nalar yang berarti pertimbangan tentang baik buruk, kekuatan pikir atau aktivitas yang memungkinkan seseorang berfikir logis. Dalam Kamus Bahasa Indonesia (2008, 994) penalaran diartikan sebagai proses, cara, perbuatan bernalar. Menurut Shurter dan Pierce dalam Offirstson (2014: 41) istilah penalaran sebagai terjemahan dari *reasoning* didefinisikan sebagai proses pencapaian kesimpulan logis berdasarkan fakta dan sumber yang relevan.

Keraf (1982: 5) mendefinisikan penalaran (*reasoning*, jalan pikiran) sebagai suatu proses berfikir yang berusaha menghubungkan-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan. Sedangkan menurut Offirstson (2014: 41) penalaran adalah suatu proses berfikir dalam proses penarikan kesimpulan. Sudarminta (2002: 40) penalaran adalah kegiatan berfikir seturut asas kelurusan berfikir atau sesuai dengan hukum logika.

Brodie (2010:7) menyatakan ketika kita bernalar, itu berarti kita mengembangkan pemikiran atau argumen, yang mungkin untuk mencapai beberapa tujuan yaitu, untuk meyakinkan orang lain atau diri kita sendiri tentang pernyataan tertentu; untuk memecahkan masalah; atau untuk mengintegrasikan sejumlah ide menjadi satu kesatuan yang lebih koheren. Keraf (1982: 5) juga menjelaskan penalaran bukan saja dapat dilakukan dengan menggunakan fakta-fakta yang masih berbentuk polos, tetapi dapat juga dilakukan dengan mempergunakan fakta-fakta yang telah dirumuskan dalam kalimat-kalimat yang berbentuk kesimpulan atau pendapat.

2.3.1 Kemampuan Penalaran Matematis

Menurut Offirstson (2014: 41) penalaran matematis adalah kemampuan berfikir dalam melihat dan menganalisis fenomena yang muncul untuk kemudian disusun suatu konjektur yang bisa digunakan dalam penarikan kesimpulan. NCTM (2000: 56) penalaran matematis merupakan cara untuk membangun pengetahuan, wawasan tentang bermacam-macam fenomena. Sedangkan menurut Rohana (2015: 109) berpendapat bahwa penalaran matematis merupakan proses pengambilan kesimpulan tentang sejumlah ide berdasarkan fakta-fakta yang ada melalui pemikiran yang logis dan kritis dalam menyelesaikan masalah matematika.

Perkembangan tentang definisi penalaran juga dijelaskan oleh Turner (2013: 98) sebagai berikut:

Tabel 2.5 Perkembangan Definisi Penalaran dan Argumen

<i>Reasoning and Argumen</i>	
2005	<i>Logically rooted thought processes that explore and connect problem elements to work towards a conclusion, and activities related to justifying, and explaining conclusion; can be part of problem solving process.</i>

2007	<i>Logically rooted thought processes that explore and link problem elements so as to make inferences from them, or to check a justification that is given or provide a justification of statements.</i>
2013	<i>Drawing inferences by using logically rooted thought processes that explore and connect problem elements to form, scrutinize or justify argumens and conclusions.</i>

Sumber: Turner (2013: 98)

Tabel tersebut menjelaskan bahwa hingga tahun 2007 penalaran diartikan sebagai proses berpikir yang didasarkan pada logika sedangkan pada tahun 2013 berkembang menjadi penarikan kesimpulan yang didasarkan pada proses berpikir secara logika. Proses ini mengeksplorasi dan menghubungkan elemen-elemen dalam permasalahan untuk menerima atau membenarkan pendapat dan kesimpulan.

Dalam beberapa penelitian lain, penalaran matematis seringkali diasumsikan sebagai penalaran kuantitatif (*Quantitative Reasoning*). Davidson dan Mckinney (2000) menyatakan bahwa *Quantitative Reasoning is a skill one with practical application*. Hal ini berarti kemampuan penalaran merupakan salah satu keterampilan dengan aplikasi praktis. Sedangkan menurut Sroyer (2013: 2) penalaran kuantitatif adalah kemampuan yang dikembangkan dalam pembelajaran matematika untuk menganalisis informasi kuantitatif dan untuk menentukan keterampilan dan prosedural yang dapat diterapkan dalam masalah tertentu untuk sampai pada suatu solusi. NCTM (2000), Asosiasi Matematika Amerika (MAA, 2003), masyarakat matematika Amerika (AMS) (Howe, 1998) dan Asosiasi Matematika Amerika untuk Diploma Dua (AMATYC, 1995) dalam laporan mereka tentang tujuan pendidikan matematika semua membahas penalaran kuantitatif sebagai kemampuan yang harus dikembangkan pada semua peserta didik SMA dan mahasiswa didik.

Dalam pembelajaran matematika Hendriana dan Utari Soemarmo (2014:32) mengklasifikasikan penalaran matematis (*mathematical reasoning*) dalam dua jenis yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif.

1. Penalaran induktif

Penalaran induktif (2014:32) didefinisikan sebagai penarikan kesimpulan berdasarkan data terbatas. Nilai kebenaran kesimpulan dalam penalaran induktif tidak mutlak tetapi bersifat probabilistik. Ditinjau dari proses penarikan kesimpulannya penalaran induktif meliputi beberapa kegiatan sebagai berikut:

- a. Penalaran transduktif yaitu proses menarik kesimpulan dari pengamatan terbatas dan diberlakukan terhadap kasus tertentu.
- b. Penalaran analogi yaitu proses penarikan kesimpulan berdasarkan keserupaan proses atau data.
- c. Penalaran generalisasi yaitu proses menarik kesimpulan secara umum berdasarkan data terbatas.
- d. Memperkirakan jawaban, solusi kecenderungan, interpolasi, dan ekstrapolasi.
- e. Memberikan penjelasan terhadap model, fakta, sifat, hubungan, atau pola yang ada.
- f. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi, dan menyusun konjektur.

2. Penalaran deduktif

Penalaran deduktif (2014: 38) adalah penarikan kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati. Nilai kebenaran dalam penalaran deduktif bersifat benar mutlak benar atau salah dan tidak kedua bersama-sama. Beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran deduktif diantaranya:

- a. Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu.
- b. Menarik kesimpulan logis berdasarkan aturan inferensi, berdasarkan proposi yang sesuai, berdasarkan peluang, korelasi antara dua variable, menetapkan kombinasi beberapa variabel.
- c. Menyusun pembuktian langsung, pembuktian tak langsung, dan pembuktian dengan induksi matematika.
- d. Menyusun analisis dan sintesis beberapa kasus.

Untuk mengukur penalaran matematis, diperlukan adanya indikator yang dijadikan ukuran suatu kemampuan penalaran. Menurut *Principles and Standards* (NCTM, 2000: 342) standar penalaran matematis meliputi (a) mengenal penalaran sebagai aspek mendasar dari matematika, (b) membuat dan menyelidiki dugaan matematik, (c) mengembangkan dan mengevaluasi matematik, dan (d) memilih dan menggunakan tipe penalaran. Sedangkan menurut Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan nomor 59 tahun 2014 tentang kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah menguraikan indikator peserta didik yang memiliki kemampuan dalam penalaran matematis adalah 1) mengajukan dugaan, 2) menarik

kesimpulan dari suatu pernyataan 3) memberikan alternatif bagi suatu argument, 4) menemukan pola pada suatu gejala matematis, 5) melakukan manipulasi matematika, 6) memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran, 7) memeriksa kesahihan atau kebenaran suatu argumen dengan penalaran induksi, 8) menurunkan atau membuktikan rumus dengan penalaran deduksi

Untuk mengetahui kemampuan penalaran peserta didik, dapat dilakukan dengan menggunakan tes penalaran. Adapun kategori soal penalaran menurut ERB (*Educational Record Bureau*) dalam bukunya CTP 4 adalah (1) *Comparison* (membandingkan), (2) *Extension/ Generalization* (perluasan/ generalisasi), (3) *Analysis* (analisis). Sedangkan jenis soal penalaran menurut ETS (*Educational Testing Service*) dalam bukunya *Practice Book for the Paper-based GRE Revised General Test* dan *The Official Guide to the GRE Revised General Test* adalah (1) *Quantitative Comparison Question* (pertanyaan membandingkan kuantitatif), (2) *Multiple Choice Question – Select One Answer Choice* (pertanyaan pilihan ganda dengan memilih satu jawaban yang benar), (3) *Multiple Choice Question – Select One or More Answer Choice* (pertanyaan pilihan ganda dengan memilih satu atau lebih jawaban yang benar), (4) *Numeric Entity Question* (pertanyaan memasukkan bilangan pada kotak jawaban).

Dalam penelitian ini menggunakan tes penalaran menurut ETS (*Educational Testing Service*) dalam bukunya *Practice Book for the Paper-based GRE Revised General Test* dan *The Official Guide to the GRE Revised General Test* karena di dalam buku ini membahas banyak tentang penalaran kuantitatif dan memiliki banyak variasi soal. Selain itu, soal-soal pada buku tersebut sudah pernah diujicobakan berulang-ulang dan dinyatakan sebagai soal yang valid sehingga tidak perlu adanya validasi.

Sedangkan tujuan tes penalaran (ETS, 2012: 21) adalah untuk mengukur kemampuan dasar matematika, pemahaman konsep dasar matematika, dan kemampuan untuk berfikir kuantitatif dan untuk pemodelan dan pemecahan masalah dengan metode kuantitatif.

Dengan demikian, maka yang dimaksud kemampuan penalaran matematis dalam penelitian ini adalah kecakapan peserta didik dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan yang telah dibuktikan kebenarannya. Berikut adalah contoh soal kemampuan penalaran kuantitatif beserta alternatif jawabannya.

Contoh soal membandingkan (<i>Comparison</i>)	
$y = 2x^2 + 7x - 3$	
<u>Kuantitas A</u>	<u>Kuantitas B</u>
x	y
Pernyataan manakah yang benar?	
(A) Jumlah A lebih besar.	
(B) Jumlah B lebih besar.	
(C) Dua kuantitas adalah sama.	
(D) Hubungan tidak dapat ditentukan dari informasi yang diberikan.	
Jawaban yang benar adalah D	
Alternatif Jawaban:	
Jika $x = 0$, maka $y = 2(0^2) + 7(0) - 3$	
$= -3$, sehingga dalam contoh ini $x > y$	
Tetapi jika $x = 1$, maka $y = 2(1^2) + 7(1) - 3$	
$= 6$, sehingga dalam contoh ini $y > x$	
Maka, jawaban yang benar adalah pilihan D (Hubungan tidak dapat ditentukan dari informasi yang diberikan)	
Contoh soal pilihan ganda dengan memilih satu jawaban yang benar <i>(Multiple Choice Question – Select One Answer Choice)</i>	
Jika $y^{-2} + 2y^{-1} - 15 = 0$, mana dari berikut bisa menjadi nilai y ?	
a. 3	
b. $\frac{1}{5}$	
c. $-\frac{1}{5}$	
d. $-\frac{1}{3}$	
e. -5	
Jawaban yang benar adalah C	

Alternatif Jawaban:

$$y^{-2} + 2y^{-1} - 15 = 0$$

Misalkan $y^{-1} = a$ maka $a^2 + 2a - 15 = 0$

$$(a + 5)(a - 3) = 0$$

$$a = -5 \vee a = 3$$

Jika $a = -5$ maka $a = y^{-1} = -5$

$$\frac{1}{y} = -5$$

$$-\frac{1}{5} = y$$

Jika $a = 3$ maka $a = y^{-1} = 3$

$$\frac{1}{y} = 3$$

$$\frac{1}{3} = y$$

Jadi, $y = \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\}$

Contoh soal memasukkan jawaban ke kotak jawaban (*Numeric Entry Question*)

Jika $\sqrt[3]{x} = 3$ dan $x = \sqrt{y}$, tentukan nilai dari y ?

$y =$

⊖
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Jawaban yang benar adalah $y = 729$

Alternatif Jawaban:

$$\sqrt[3]{x} = 3 \rightarrow x = 27$$

$$x = \sqrt{y} \rightarrow 27 = \sqrt{y}$$

$$y = 27 \times 27 = 729$$

Jadi, $y = 729$

2.4 KETERKAITAN ANTARA KOMUNIKASI MATEMATIS DENGAN KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIS

Dalam pengertian matematika menurut istilah, matematika berarti ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan bernalar (Suherman, 2003: 16). Hal ini dimaksudkan bukan berarti ilmu lain diperoleh tidak melalui penalaran, akan tetapi dalam ilmu matematika lebih menekankan aktivitas dalam dunia *rasio* (penalaran), sedangkan dalam ilmu lain lebih menekankan hasil observasi atau eksperimen disamping penalaran. Matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran.

Penalaran dan komunikasi matematis merupakan salah satu aspek penilaian utama dalam pembelajaran matematika. Hal ini tertuang dalam Permendiknas No. 22 Tahun 2006. Menurut NCTM (2000: 56-60) kemampuan komunikasi dan penalaran matematis merupakan aspek yang sangat penting dan esensial. Turmudi (2008: 55) mengatakan bahwa aspek komunikasi dan penalaran hendaknya menjadi aspek penting dalam pembelajaran matematika.

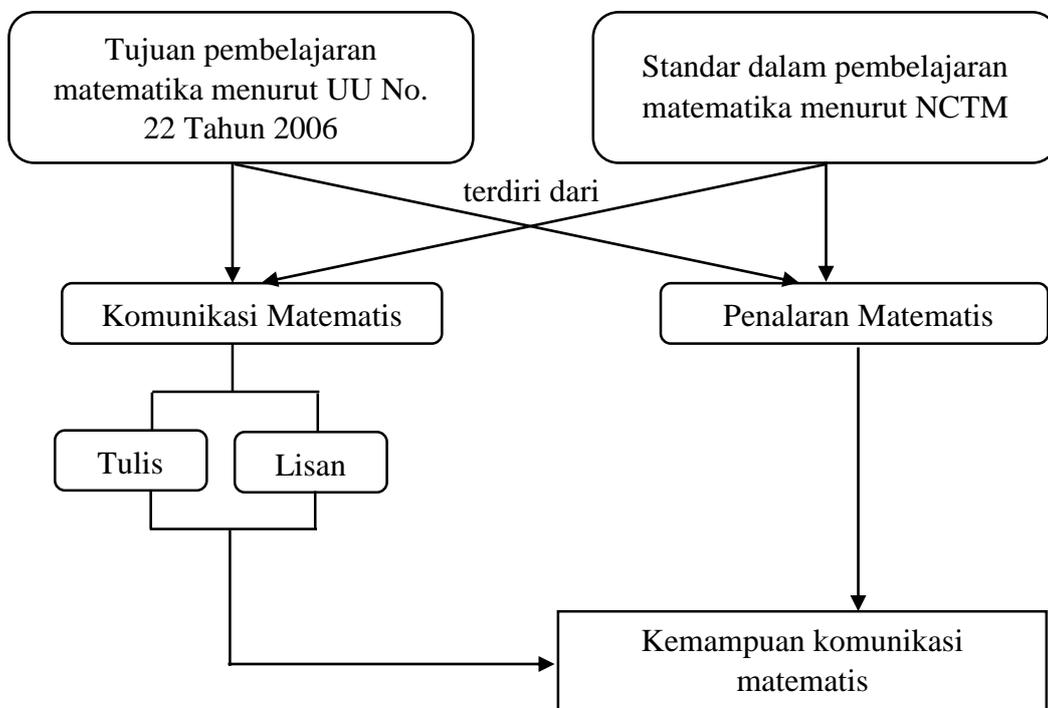
Menurut Amir (2014: 32) dalam penelitiannya yang mengatakan bahwa jika peserta didik dapat mengomunikasikan idenya berarti kemampuan penalarannya sudah dibentuk. Sedangkan menurut Ainun, dkk (2015: 72) penalaran matematis merupakan suatu kebiasaan otak yang apabila dikembangkan dengan baik dan konsisten akan memudahkan dalam mengomunikasikan matematika baik secara tertulis maupun lisan. Menuangkan gagasan dan ide-ide matematika bukanlah hal yang mudah, karena diperlukan kecermatan dan daya nalar yang baik (2015: 72). Brodie (2010: 7) juga mengungkapkan bahwa ketika kita bernalar, berarti kita mengembangkan pemikiran atau argument atau untuk mengintegrasikan sejumlah ide menjadi satu kesatuan yang koheren.

2.5 KERANGKA KONSEPTUAL PENELITIAN

Kerangka konsep penelitian pada dasarnya adalah hubungan antara konsep-konsep yang ingin diamati atau diukur melalui penelitian (Notoatmodjo, 2010: 100). Hubungan antara konsep-konsep dalam penelitian ini terdiri dari kemampuan komunikasi matematis dengan kemampuan penalaran matematis.

Berikut adalah kerangka konsep yang digunakan untuk mempermudah pemahaman arah dan maksud dalam penelitian ini.

Gambar 2.1 Kerangka Konsep Penelitian



Keterangan:

: yang diteliti