

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 HAKEKAT MATEMATIKA

Selama ini kita sering mendengar istilah matematika. Tetapi untuk memberikan arti yang pasti matematika sangat sulit. Definisi matematika makin lama makin sukar untuk dibuat secara tepat dan singkat. Sampai sekarang ini diantara para ahli matematika belum ada kesepakatan yang bulat mengenai definisi matematika

Namun demikian, beberapa ahli mencoba memberikan pandangan tentang matematika sekaligus tentang telaahan dari matematika itu sendiri.

Istilah *mathematics* (Inggris), *mathematik* (Jerman), *mathematique* (Perancis), *matematico* (Italia), *matematiceski* (Rusia) atau *matematiceski* (Belanda) berasal dari perkataan latin *mathematica* yang mulanya diambil dari perkataan Yunani *mathematike*, yang berarti "*relating to learning*". Perkataan ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (*knowledge, science*). Perkataan *mathematike* berhubungan erat dengan sebuah kata lainnya yang serupa, yaitu *mathanein* yang mengandung arti belajar (berpikir). Mempelajari matematika perlu diketahui hakekat dari matematika itu sendiri, Menurut Hudoyo (2001 :46)

Matematika berkenaan dengan ide-ide struktur-struktur dan hubungan-hubungannya yang diatur secara logis sehingga matematika itu berkaitan dengan konsep-konsep abstrak. Suatu kebenaran dalam matematika dihubungkan berdasarkan atas alasan logis dan menggunakan pembuktian deduktif.

Dari pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa matematika merupakan kumpulan unsur-unsur atau konsep-konsep abstrak yang berhubungan dan bersistem deduktif. Namun kerja matematika terdiri dari observasi, menebak dan merasa, mengetes hipotesa mencari analogi dan sebagaimana yang telah dikemukakan di atas akhirnya merumuskan teorema-teorema yang dimulai dari kebenaran itu bisa dimulai dengan cara induktif, tetapi seterusnya generalisasi

yang benar untuk semua keadaan harus bisa dibuktikan secara deduktif. Dalam matematika suatu generalisasi, sifat teori atau dalil itu belum dapat diterima kebenarannya asumsi-asumsi dan unsur-unsur yang tidak didefinisikan. Ini benar-benar merupakan aktivitas mental.

Perlu diketahui bahwa baik isi maupun metode mencari kebenaran dalam matematika berbeda dengan ilmu pengetahuan alam, apalagi dengan ilmu pengetahuan pada umumnya. Metode mencari sebelum dapat dibuktikan secara deduktif.

Berdasarkan pertimbangan-pertimbangan yang dikemukakan di atas, yang dimaksud dengan matematika dalam penelitian ini adalah kegiatan intelektual yang berkenaan dengan ide-ide abstrak dan hubungan-hubungan yang diatur menurut urutan logis, tersusun secara hirarkis dan berdasarkan sistem deduktif.

2.2 PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Setiap proses pembelajaran mempunyai tujuan yang telah ditetapkan sebelumnya. Semua usaha diupayakan semaksimal mungkin agar tujuan itu tercapai.

Menurut Hudoyo (1979:107): Belajar merupakan suatu proses aktif dalam memperoleh penggalan atau pengetahuan baru sehingga menyebabkan perubahan tingkah laku.

Menurut Hudoyo(2001:27) pembelajaran adalah sebagai seperangkat acara peristiwa eksternal yang dirancang untuk mendukung terjadinya beberapa proses belajar yang sifatnya internal.

Proses pembelajaran dikatakan berhasil bila siswa dapat belajar sesuai dengan tujuan yang direncanakan sebelumnya.

Dari uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa pembelajaran adalah segala upaya penataan lingkungan belajar yang direncanakan guru untuk membantu proses belajar siswa.

Didalam penerapan kegiatan pembelajaran matematika hendaknya tidak membatasi pada keterampilan mengerjakan soal sebagai aplikasi konsep-konsep matematika yang telah dipelajari.

Dalam iklim belajar yang harmonis, suasana kegiatan pembelajaran hidup dan komunikasi antara guru dengan siswa belajar lancar. Dengan demikian proses pembelajaran berlangsung secara efektif sesuai tujuan pembelajaran matematika.

2.3 TINJAUAN TENTANG MATERI LOGIKA

Logika matematika adalah salah satu pokok bahasan mata pelajaran matematika SMA kelas X semester II (Sri kurnianingsih 2004 :142). Dengan mempelajari pokok bahasan logika matematika diharapkan siswa dapat menggunakan aturan-aturan dasar dalam logika matematika untuk penarikan kesimpulan yang sah, karena logika adalah sebuah metode dan prinsip-prinsip yang dapat memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dengan penalaran yang salah.

2.3.1 Pernyataan, kalimat terbuka serta ingkarannya

2.3.1.1 Pernyataan

Suatu pernyataan adalah suatu kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja.

Contoh:

p : semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

q : Ibukota Provinsi Jawa Timur adalah Surabaya

r : $3 + 2 = 7$

dari ketiga contoh tersebut diketahui bahwa pernyataan p bernilai salah, pernyataan q bernilai benar, dan pernyataan r bernilai salah.

2.3.1.2 Kalimat terbuka

Kalimat terbuka adalah suatu kalimat yang nilai kebenarannya belum dapat ditentukan.

Contoh:

$n + 2$ adalah bilangan prima

n disebut peubah. n dapat diganti dengan beberapa bilangan, seperti 0, 1, 3, 5, 9 sehingga kalimat tersebut menjadi suatu pernyataan yang benar. Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari kalimat tersebut adalah $\{0, 1, 3, 5, 9, \dots\}$.

2.3.1.3 Ingkaran

Ingkaran disebut juga negasi atau penyangkalan, operasi ingkaran hanya berlaku pada suatu pernyataan. Ingkaran dari suatu pernyataan adalah pernyataan baru dengan nilai kebenaran berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan sebelumnya. Ingkaran dari suatu pernyataan diperoleh dengan menambahkan kata "tidak benar" di awal kalimat, atau dengan cara menyisipkan kata "tidak" atau "bukan" pada pernyataan tersebut.,

Misalkan p adalah suatu pernyataan, ingkaran dari p dilambangkan $\sim p$ dan dibaca "bukan p " adalah suatu pernyataan yang bernilai salah, jika p bernilai benar. Dan jika p bernilai salah maka $\sim p$ bernilai benar.

Contoh 1.3

Tuliskan ingkaran dari p : 3 adalah faktor dari 24!

Jawab

$\sim p$: tidak benar 3 adalah faktor dari 24 atau

$\sim p$: 3 bukan faktor dari 24.

2.3.2 Pernyataan Majemuk

Pernyataan majemuk adalah gabungan dua atau lebih pernyataan tunggal. Kata penghubungnya adalah "dan", "atau", "jika maka", dan "jika dan hanya jika

2.3.2.1 Konjungsi

Misalkan p dan q adalah pernyataan, pernyataan majemuk p dan q disebut konjungsi dari p dan q dan dilambangkan dengan $p \wedge q$.

Konjungsi berailai benar jika p dan q (atau keduanya) salah. Definisi ini dapat diperlihatkan dengan label kebenaran di bawah ini.

Tabel 2.1 Nilai kebenaran dari konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Sumber : Buku paket matematika SMU kelas X

Contoh:

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut:

p : Pulau Halmahera terletak di Provinsi Maluku Utara

q : 36 adalah bilangan kuadrat.

Jawab:

p benar, q benar maka $p \wedge q$: Pulau Halmahera terletak di Provinsi Maluku Utara dan 36 adalah bilangan kuadrat (benar).

2.3.2.2 Disjungsi

Misalkan p, q adalah pernyataan, pernyataan majemuk p, q disebut disjungsi dari p, q dan dilambangkan dengan $p \vee q$.

Disjungsi bernilai benar jika salah satu p dan q atau keduanya adalah benar, disjungsi bernilai salah jika p dan q (keduanya) adalah salah. Definisi ini dapat diperlihatkan dengan tabel kebenaran di bawah ini.

Tabel 2.2 Nilai kebenaran dari disjungsi

P	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Sumber : Buku paket matematika SMU kelas X

Contoh:

Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini:

p : 13 adalah bilangan prima

q : Padang adalah Ibukota Provinsi Sumatera Barat

Jawab:

p benar, q benar maka $p \vee q$: 13 adalah bilangan prima atau Padang adalah Ibukota Propinsi Sumatera Barat (Benar)

2.3.2.3 Implikasi

Misalkan p dan q adalah pernyataan, implikasi adalah suatu pernyataan majemuk dengan bentuk "jika p maka q ", dilambangkan dengan $p \rightarrow q$.

Pernyataan p disebut hipotesis dari implikasi. Adapun pernyataan q disebut konklusi (kesimpulan). Implikasi bernilai salah hanya jika hipotesis p bernilai benar dan konklusi q bernilai salah. Untuk kasus lainnya adalah benar. Definisi ini dapat diperlihatkan dalam tabel kebenaran seperti di bawah ini.

Tabel 2.3 Nilai kebenaran dari implikasi

P	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Sumber : Buku paket matematika SMU kelas X

Contoh:

Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini:

Jika $3 + 5 = 9$ maka besi adalah benda padat

Jawab:

Jika $3 + 5 = 9$ (salah), maka besi adalah benda padat (benar). Alasan salah, kesimpulan benar, jadi, implikasi bernilai benar.

2.3.2.4 Biimplikasi

Misalkan p dan q adalah pernyataan, biimplikasi adalah suatu pernyataan majemuk dengan bentuk " p jika dan hanya jika q ", dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$.

Biimplikasi p dan q bernilai benar jika hipotesis p dan q keduanya adalah benar atau jika p dan q keduanya adalah salah, untuk kasus lainnya adalah salah. Definisi ini dapat diperlihatkan dalam label kebenaran seperti di bawah ini.

Tabel 2.4 Nilai kebenaran dari biimplikasi

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Sumber : Buku paket matematika SMU kelas X

Contoh :

Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini:

$20 + 3 = 23$ jika dan hanya jika 23 adalah bilangan prima

Jawab :

$20 + 3 = 23$ (benar) jika dan hanya jika 23 adalah bilangan prima (benar)

p benar, q benar. Jadi $p \leftrightarrow q$ benar.

2.3.3 Pernyataan Majemuk

Kalimat majemuk adalah kalimat yang di peroleh dengan menggabungkan dua pernyataan. Dua pernyataan dapat digabungkan menggunakan kata sambung, seperti dan, atau sehingga, jika....maka.....,jika dan hanya jika.....,meskipun,tetapi.

Perhatikan contoh dibawah ini.

P : saya suka pisang.

q : saya suka jeruk.

Pernyataan p dan q dapat digabungkan menggunakan kata hubung "dan" menjadi "saya suka pisang dan jeruk".

2.3.4 Konvers, Invers dan Kontraposisi

2.3.4.1 Definisi konvers, invers dan kontraposisi

Jika terdapat implikasi : $p \rightarrow q$

Konvers : $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

Hubungan implikasi, konvers, invers dan kontraposisi

Implikasi \equiv kontraposisi $\Rightarrow p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Konvers \equiv invers $\Rightarrow q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

2.3.4.2 Ingkaran dari implikasi, konvers, invers dan kontraposisi

Ingkaran implikasi \equiv ingkaran kontraposisi

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim q \rightarrow \sim p) \equiv P \wedge \sim q$

Ingkaran konvers \equiv ingkaran invers

$$\sim (q \wedge p) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv q \wedge \sim p$$

Contoh:

Tentukanlah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan berikut: "jika $x < -3$ maka $x^2 > 9$ ".

Jawab:

"jika $x < -3$ maka $x^2 > 9$ " adalah implikasi dengan

$$p(x): x < -3 ; \sim p(x): x \geq -3$$

$$q(x): x^2 > 9 ; \sim q(x): x^2 \leq 9$$

$$\text{Konvers} : \text{"jika } x^2 > 9 \text{ maka } x < -3 \text{"}$$

$$\text{Invers} : \text{"jika } x \geq -3 \text{ maka } x^2 \leq 9 \text{"}$$

$$\text{Kontraposisi} : \text{"jika } x^2 \leq 9 \text{ maka } x \geq -3 \text{"}$$

2.3.5 Penarikan Kesimpulan

Premis adalah suatu proses penarikan kesimpulan terdiri atas beberapa pernyataan yang diketahui nilai kebenarannya.

Kesimpulan/konklusi adalah suatu pernyataan baru yang ditarik dari premis- premis semula. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut argumentasi. Suatu argumentasi dikatakan sah apabila premis-premisnya benar, maka konklusinya juga benar.

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam proses penarikan kesimpulan adalah sebagai berikut:

- a. Argumentasi dikatakan berlaku atau sah jika konjungsi dari premis- premisnya berimplikasi konklusi.
- b. Argumentasi dikatakan tidak berlaku atau tidak sah jika konjungsi dari premis-premisnya tidak berimplikasi konklusi.

Misalkan pernyataan-pernyataan yang diketahui (premis-premis) adalah a dan b, konklusinya c, maka prinsip-prinsip logika tersebut dapat dinyatakan dengan premis-premis dan konklusi sebagai berikut:

- a. Untuk argumentasi yang sah

$$a \wedge b \rightarrow c$$

- b. Untuk argumentasi yang tidak sah

$$a \wedge b \not\rightarrow c$$

(tanda $\not\rightarrow$ dibaca : tidak berimplikasi)

Suatu argumentasi disusun dengan cara menuliskan premis-premisnya baris demi baris dari atas ke bawah, kemudian dibuat garis mendatar sebagai batas antara premis-premis dengan konklusi

Contoh:

a.premis 1

b.premis 2

\therefore c kesimpulan/konklusi

Pernyataan a sebagai premis 1, pernyataan b sebagai premis 2 dan pernyataan c sebagai kesimpulan/konklusi.

Tanda \therefore dibaca "jadi" atau "oleh karena itu".

Ada tiga aturan penarikan kesimpulan (argumentasi) yaitu :

- a. Modus ponens

Misalkan diketahui premis-premis $p \rightarrow q$ dan p dari premis-premis itu dapat diambil konklusi q . Pengambilan kesimpulan seperti itu disebut modus ponens. Modus ponens dapat digambarkan sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1
 p premis 2
 $\therefore q$ kesimpulan/konklusi

Contoh:

Jika Andi rajin belajar, maka ia akan naik kelaspremis 1
Andi rajin belajar premis 2
 \therefore Andi akan naik kelaskonklusi

b. Modus tollens

Misalkan diketahui premis-premis $p \rightarrow q$ dan $\sim q$. dari premis-premis itu dapat diambil konklusi $\sim p$. Pengambilan kesimpulan seperti itu disebut modus tollens. Modus tollens dapat digambarkan sebagai berikut :

$P \rightarrow q$ premis 1
 $\sim q$ premis 2

 $\therefore \sim p$ kesimpulan / konklusi

Contoh:

Jika hari libur, maka Ali rekreasi premis 1
Ali tidak rekreasi premis 2

\therefore tidak hari libur konklusi

b. Silogisme

Misalkan diketahui premis-premis $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$, dari premis-premis itu dapat ditarik konklusi $p \rightarrow r$. Penarikan kesimpulan dengan cara seperti itu disebut silogisme.

Silogisme menggunakan sifat transitif dari pernyataan implikasi silogisme dapat digambarkan sebagai berikut :

$p \rightarrow q$ premis 1
 $q \rightarrow r$ premis 2

 $\therefore p \rightarrow r$ kesimpulan/konklusi

Contoh 1.12

Jika Andi belajar matematika, maka Ali belajar fisika..... premis 1
Jika Ali belajar fisika, maka Amir belajar kimia..... premis 2..

\therefore jika Andi belajar matematika, maka Amir belajar kimia
 ...konklusi

2.3 KESALAHAN SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL LOGIKA MATEMATIKA

Untuk mengetahui ketercapaian penguasaan materi dalam suatu proses belajar mengajar seorang guru harus melakukan evaluasi hasil belajar. Evaluasi hasil belajar adalah penentuan nilai dan pencapaian tujuan hasil belajar. Pada bagian yang umum evaluasi dilakukan dengan memberikan suatu tes kepada siswa. Diharapkan hasil tes ini dapat menunjukkan apakah suatu materi telah dikuasai oleh siswa dengan baik atau tidak. Seringkali pendidik merasa tidak puas akan hasil tes yang dilakukan karena banyaknya siswa mencapai nilai yang kurang memuaskan atau tidak sesuai dengan harapan. Hal itu dapat terjadi karena siswa melakukan kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan soal-soal yang diberikan.

Kesalahan merupakan suatu bentuk penyimpangan dari suatu kebenaran, prosedur yang telah ditetapkan sebelumnya atau penyimpangan dari suatu yang diharapkan. Seperti pendapat Sukirman yang menyatakan bahwa kesalahan merupakan penyimpangan terhadap yang benar dan bersifat sistematis, konsisten atau insidental.

Menurut Haryono (dalam Sartin, 2005) ”mengelompokkan kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika ke dalam dua kelompok, yaitu ”(1) kesalahan konsep, yaitu kesalahan yang dibuat oleh siswa karena salah menafsirkan konsep-konsep, operasi-operasi atau salah dalam penerapannya, (2) kesalahan bukan konsep, yaitu kesalahan yang dibuat oleh siswa karena salah dalam perhitungan.

Menurut R.Soedjadi (2000 :13) Dalam matematika obyek dasar yang dipelajari adalah abstrak, sering juga disebut obyek mental. Obyek obyek itu merupakan obyek pikiran. Obyek dasar itu meliputi (1) fakta, (2) konsep, (3) operasi ataupun relasi dan (4) prinsip. Dari obyek dasar itulah dapat disusun suatu pola dan struktur matematika.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini, jenis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal-soal logika matematika, meliputi kesalahan konsep, kesalahan prinsip dan kesalahan fakta. Berikut adalah penjelasan dari masing-masing jenis kesalahan :

1. Kesalahan konsep adalah kesalahan siswa tidak memahami suatu definisi atau siswa salah dalam menggunakan konsep dalam menyelesaikan soal logika matematika, seperti
 - a. salah dalam memahami makna soal.
 - b. salah dalam menentukan suatu kalimat termasuk pernyataan atau bukan pernyataan.
 - c. salah dalam menentukan nilai kebenaran yang mungkin terjadi pada suatu pernyataan.
 - d. salah dalam menentukan ingkaran dari suatu pernyataan.
2. Kesalahan prinsip adalah kesalahan karena siswa tidak memahami suatu prinsip, diantaranya aksioma, teorema dan sifat, seperti: salah dalam memahami prinsip-prinsip logika dalam penarikan kesimpulan.
3. Kesalahan fakta adalah kesalahan dalam penulisan simbol matematika, seperti salah menggunakan simbol-simbol.

2.5 FAKTOR-FAKTOR PENYEBAB KESALAHAN SISWA

Menurut penelitian Novita (dalam Fathonatunnisah, 2004) secara garis besar faktor-faktor yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika dapat digolongkan menjadi dua, yaitu : (1) penyebab dari diri siswa; (2) penyebab dari guru.

Penyebab dari diri siswa antara lain: siswa kurang memiliki penguasaan konsep atau sifat dari materi yang dipelajari, siswa kurang teliti dalam melakukan perhitungan, siswa tidak dapat menentukan langkah penyelesaian soal yang tepat, siswa tidak teliti dalam menulis atau menggunakan data, siswa tidak kontinu dalam belajar matematika, cara belajar siswa kurang baik, siswa kurang berminat terhadap pelajaran matematika dan siswa kurang konsentrasi pada saat mengerjakan tes. Sedangkan penyebab dari guru adalah buku acuan yang digunakan kurang bagus dan model pembelajaran yang diterapkan guru pengajar kurang sesuai.

Hasil penelitian sebelumnya yang menguatkan penelitiannya dalam penulis yang berjudul "Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal-soal logika matematika juga diperkuat penelitian yang dilakukan oleh :

1. Priyandani (2005 :74) FKIP Matematika, Universitas Malang, yang berjudul analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal-soal pada bahasan persamaan linier, yang menyatakan bahwa ada beberapa siswa yang melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal-soal persamaan linier yang meliputi kesalahan konseptual dan kesalahan prosedur
2. Sartin (FKIP Matematika, Universitas Negeri Surabaya, yang berjudul Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal cerita yang memuat pecahan desimal, yang menyatakan bahwa kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika terdapat dalam dua kelompok yaitu kesalahan konsep dan kesalahan bukan konsep.
3. Fathonatunnisah (2004 :52). FKIP Matematika, Universitas Negeri Surabaya yang berjudul Analisis kesalahan penyelesaian siswa dalam menyelesaikan soal matematika pokok bahasan persamaan kuadrat yang menyatakan bahwa yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika digolongkan menjadi dua yaitu penyebab dari guru dan siswa.